Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **15 de julio de 2013**

1.– *Sea $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrárica. Se sabe que:*

- *Los vectores $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ son una base de vectores conjugados.*

- *w tiene rango 1.*

- *$(0,1,0)$ es un vector autoconjugado.*

- *$w(1,2,0)=1$.*

i) *Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.*

Por ser $B=\{(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ una base de vectores conjugados, la matriz asociada a w respecto a dicha base es diagonal:

$$F_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Por ser $(0,1,0)$ autoconjugado, $w(0,1,0)=0$. Observamos que $(0,1,0)_C = (0,1,0)_B$ y así matricialmente:

$$(0,1,0)F_B(0,1,0)^t = 0$$

de donde $b=0$.

Además $w(1,2,0)=1$. Pasamos el vector $(1,2,0)$ a la base B para expresar matricialmente la condición dada:

$$M_{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = M_{CB}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $(1,2,0)_C = (1,1,0)_B$ y $w(1,2,0)=1$ se expresa como:

$$(1,1,0)F_B(1,1,0)^t = 0$$

de donde $a+b=1$. Dado que $b=0$, deducimos que $a=1$.

Finalmente como w tiene rango 1 y:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

deducimos que $c=0$.

Para terminar hacemos un cambio de base de la matriz asociada:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC} = M_{CB}^{-t} F_B M_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) *Clasificar w.*

La forma diagonal asociada a w es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el rango es 1, la signatura $(1,0)$. Se trata de una forma cuadrática degenerada semidefinida positiva.

iii) *Hallar todos los vectores autoconjugados de w.*

Se trata de los vectores cuya imagen por w es nula.

Trabajando en la base B:

$$\begin{aligned} Aut(w) &= \{(x',y',z')_B | (x',y',z')F_B(x',y',z')^t = 0\} = \\ &= \{(x',y',z')_B | x'^2 = 0\} = \{(x',y',z')_B | x' = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(0,1,0)_B, (0,0,1)_B\}. \end{aligned}$$

Expresamos el resultado en la base canónica:

$$(0,1,0)_B = (0,1,0)_C, \qquad (0,0,1)_B = (1,1,1)_C.$$

Por tanto:

$$Aut(w) = \mathcal{L}\{(0,1,0),(1,1,1)\}.$$

(1.4 puntos)

2.– *En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & a \\ 1 & b & c \end{pmatrix}.$$

Sean los puntos $A = (1,2,0)$, $B = (1,3,1)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (1,2,-1) + \lambda(0,1,2).$$

Hallar a, b, c sabiendo que $d(A,B) = 3$ y que las rectas r y s son perpendiculares.

Por ser una matriz de Gram es simétrica y así $b = a$.

Ahora:

$$3 = d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \|B - A\| = \|(0,1,1)\| = \sqrt{(0,1,1)G_C(0,1,1)^t}.$$

Operando obtenemos la ecuación:

$$6 + 2a + c = 9 \iff 2a + c = 3 \quad (*)$$

Para utilizar que r y s son perpendiculares hallamos sus vectores directores e imponemos que sean ortogonales.

El vector director de s nos lo dan directamente $\vec{u}_s = (0,1,2)$. Para hallar el vector director de r pasamos de implícitas a paramétricas:

$$\begin{matrix} x + y - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{matrix} \Rightarrow x = -y + 2, \quad z = x - y = -2y + 2$$

Las paramétricas quedan:

$$x = -\lambda + 2, \quad y = \lambda, \quad z = -2\lambda + 2$$

y así $\vec{u}_r = (-1, 1, -2)$.

Ahora:

$$\vec{u}_s \cdot \vec{u}_r = 0 \iff (0, 1, 2)G_C(-1, 1, -2)^t = 0 \iff -2 + 6 + 2a - 2a - 4c = 0.$$

Despejando deducimos que $c = 1$ y de $(*)$, $a = 1$.

En definitva $a = b = c = 1$.

(1.2 puntos)

3.– *Sea $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz no singular y $B = AA^t$.*

(i) *Probar que B es una matriz simétrica.*

Hay que comprobar que $B^t = B$:

$$B^t = (AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t = B.$$

(ii) *Probar que B es definida positiva.*

Dado un vector x no nulo hay que comprobar que $x^t Bx > 0$:

$$x^t Bx = x^t AA^t x = (A^t x)^t (Ax)$$

Ahora como A es no singular si $x \neq 0$ entonces $Ax \neq 0$. Por tanto $y = Ax \neq 0$. Pero:

$$(A^t x)^t (Ax) = y^t y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \ldots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 > 0.$$

(iii) *¿Es necesariamente B diagonalizable por semejanza?. Razona la respuesta.*

Toda matriz simétrica diagonaliza por semejanza.

(iv) *¿Puede ser la traza de B negativa?. Razona la respuesta.*

No, no puede ser negativa:

Toda matriz simétrica diagonaliza por semejanza y además de forma que la matriz de paso es ortogonal. Equivalentemente la diagonalización es simultánemanete por congruencia y por semejanza. Por tanto la matriz diagonal formada por los autovalores es congruente con la matriz B. Por ser B definida positiva todos los términos de la diagonal, es decir, todos los autovalores son positivos. Finalmente la traza se conserva por semejenza; por tanto la traza de B es la suma de sus autovalores y así es positiva.

(1.2 puntos)

4.– En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (1, 2, 2)$.

(i) *Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de A y B.*

Método I: Un punto $P = (x, y, z)$ equidista de A y B si:

$$d(P, A) = d(P, B) \iff \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2}$$

Elevando al cuadrado y operando resulta:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4$$

Simplificando obtenemos el plano de ecuación:

$$y + z - 2 = 0.$$

Método II: Los puntos que equidistan de dos dados en el espacio son aquellos que yacen en el plano mediatriz; es decir el plano que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento que los une. Tenemos:

$$M = \frac{A + B}{2} = (1, 1, 1).$$

El vector $\vec{AB} = (0, 2, 2)$ es perpendicular al plano buscado. Equivalentemente el vector $(0, 1, 1)$ es el vector normal de tal plano. Por tanto éste es de la forma:

$$y + z + d = 0.$$

Imponemos que pase por M:

$$1 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -2.$$

Así el lugar geomẃetrico pedido es:

$$y + z - 2 = 0.$$

(ii) *Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $z = 2$, de manera que el triángulo ABC sea isósceles con AB el lado desigual y tenga área $2\sqrt{3}$. ¿Es única la solución?.*

Por estar en el plano $z = 2$ el punto es de la forma $C = (a, b, 2)$. Ahora por formar un triángulo isósceles con AB, equidista de A y B y por tanto está en el lugar geométrico hallado en el apartado anterior:

$$b + 2 - 2 = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Es decir $C = (a, 0, 2)$. Finalmente $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$. Pero:

$$Area(ABC) = \frac{base \cdot h}{2} = \frac{\|\vec{AB}\|\|\vec{MC}\|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{(a-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2} = \sqrt{2((a-1)^2 + 2)}$$

Igualando $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$ queda:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2((a-1)^2 + 2)} \Rightarrow 6 = (a-1)^2 + 2 \Rightarrow (a-1)^2 = 4 \Rightarrow (a-1)^2 = \pm 2.$$

Vemos que hay dos soluciones (la solución no es por tanto única):

$$a = 3 \text{ ó } a = -1.$$

Es decir:

$$C = (3, 0, 2) \text{ ó } C = (-1, 0, 2).$$

(1.2 puntos)

5.– *En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación de la base canónica. Se define la transformación ortogonal que en esta base tiene asociada la matriz*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Clasificarla indicando si procede el ángulo y semieje de giro y/o el subespacio de simetría.

Utilizamos que el determinante y traza de la matriz asociada a la transformación ortogonal se conserva al cambiarla de base. El determinante de A es 1 por lo que se trata de una transformación directa: un giro de ángulo α. La traza es 1, por lo que:

$$1 + 2Cos(\alpha) = 1$$

Por tanto $cos(\alpha) = 0$ y $\alpha = \pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff (x, y, z) \in \mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}.$$

Para saber el signo del ángulo, consideramos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), A(1, 0, 0)\} = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2)\}.$$

Vemos que

$$det(M_{BC}) < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 1)$.

(1.2 puntos)

6.– *Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro $k \in R$:*

$$x^2 + 4y^2 - 2kxy + 6x + 2ky = 0$$

a) *Clasificar las cónicas en función de k.*

Las matrices asociada a la cónica A y de términos cuadráticos T son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 3 \\ -k & 4 & k \\ 3 & k & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 4 \end{pmatrix}.$$

Clasificaremos en función de los signos de $|A|$ y $|T|$.

Tenemos que:

$$|A| = -7k^2 - 36, \qquad |T| = 4 - k^2.$$

Dado que $k^2 \geq 0$ se tiene que $|A| = -7k^2 - 36 < 0$ para cualquier valor de k.

Por otra parte $|T| = 4 - k^2 = 0$ si $k = \pm 2$. Distinguimos entonces los siguiente casos:

- Si $k < -2$ entonces $|T| < 0$ y $|A| < 0$. Se trata de una hipérbola.
- Si $k = -2$ entonces $|T| = 0$ y $|A| < 0$. Se trata de una parábola.
- Si $-2 < k < 2$ entonces $|T| > 0$ y $|A| < 0$. Se trata de una elipse real.
- Si $k = 2$ entonces $|T| = 0$ y $|A| < 0$. Se trata de una parábola.
- Si $k > 2$ entonces $|T| < 0$ y $|A| < 0$. Se trata de una hipérbola.

b) *Para $k = 2$ hallar la ecucación reducida, la excentricidad y la distancia de un vértice a un foco.*

Hemos visto que para $k = 2$ se trata de una parábola. La excentricidad es por tanto $e = 1$.

Para hallar la ecuación reducida comenzamos calculando los autovalores de T:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda = 0 \iff \lambda = 5 \text{ ó } \lambda = 0.$$

La ecuación reducida es de la forma:

$$5x'^2 - 2cy' = 0,$$

con $c = \sqrt{-\frac{|A|}{\lambda_1}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. Resulta:

$$5x'^2 - \frac{16\sqrt{5}}{5}y' = 0.$$

O equivalentemente:

$$x'^2 = 2 \cdot \frac{8\sqrt{5}}{25} y'$$

El parámetro p es $p = \dfrac{8\sqrt{5}}{25}$. En una parábola la distancia del vértice al foco es $p/2$ es decir:

$$\frac{4\sqrt{5}}{25}.$$

c) *Hallar los valores de k para los cuales la recta $x = 0$ es tangente a la cónica.*

Para que la recta $x = 0$ sea tangente a la cónica el sistema formado por la recta y la cónica debe de tener una única solución doble. Resolvemos:

$$\begin{cases} 0 = x \\ 0 = x^2 + 4y^2 - 2kxy + 6x + 2ky \end{cases}$$

Susituyendo la priumera ecuación en la segunda:

$$4y^2 + 2ky = 0.$$

Para que la ecuación tenga una única solución doble ha de cumplirse que el discriminante sea nulo:

$$(2k)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0 = 0 \iff k = 0.$$

(1.6 puntos)

7.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 6xz - 2x + 4y - 6z + 3 = 0.$$

i) *Clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.*

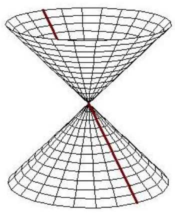
La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Para clasificar la cuádrica la diagonalizamos por congruencia:

$$A \overset{H_{31}(-3)}{\longrightarrow} \overset{H_{41}(1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-3)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{41}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{42}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{42}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(+, +, -; 0)$. Se trata por tanto de un cono real.



ii) *¿Existe algún plano que corte a la superficie en una parábola?.*

SI. Sabemos que las cónicas son precisamente las curvas que se obtienen cortando un cono con un plano. Por tanto cualquier cónica no degenerada puede obtenerse como corte de un plano con un cono. En particular las parábolas aparecen si tomamos un plano paralelo a una generatriz y que no pase por el vértice.

(1 punto)

8.– *Hallar la ecuación de una cónica que tiene por focos los puntos* $(0,0)$ *y* $(1,2)$ *y por excentricidad* $e=\sqrt{5}$.

Dado que la excentricidad es mayor que 1 se trata de una hipérbola. Teniendo en cuenta su caracterización como lugar geométrico de puntos cuya diferencia de distancias a los focos es constante, la ecuación de la misma es de la forma:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=2a, \qquad (**)$$

Además sabemos que:

$$e=c/a, \qquad (**)$$

donde c es la distancia del centro al foco; equivalentemente c es la mitad de la distancia entre los dos focos:

$$c=\frac{1}{2}\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Susituyendo en $(**)$ obtenemos:

$$\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{2a}\Rightarrow 2a=1.$$

Y ahora reemplazando en $(**)$:

$$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=1.$$

Solo resta operar:

$$\sqrt{x^2+y^2}-1=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2+y^2+1-2\sqrt{x^2+y^2}=x^2-2x+1+y^2-4y+4.$$

Simplificando:

$$x+2y-2=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Elevando de nuevo al cuadrado:

$$x^2+4y^2+4-4x-8y+4xy=x^2+y^2.$$

Y finalmente obtenemos:

$$3y^2+4xy-4x-8y+4=0.$$

(1.2 puntos)