Álgebra Lineal II **Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **15 de julio de 2013**

1.– Sea $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrárica. Se sabe que:

- Los vectores $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ son una base de vectores conjugados.
- w tiene rango 1.
- $(0,1,0)$ es un vector autoconjugado.
- $w(1,2,0) = 1$.

i) Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.

ii) Clasificar w.

iii) Hallar todos los vectores autoconjugados de w.

(1.4 puntos)

2.– En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & a \\ 1 & b & c \end{pmatrix}.$$

Sean los puntos $A = (1,2,0)$, $B = (1,3,1)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (1,2,-1) + \lambda(0,1,2).$$

Hallar a, b, c sabiendo que $d(A,B) = 3$ y que las rectas r y s son perpendiculares.

(1.2 puntos)

3.– Sea $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz no singular y $B = AA^t$.

(i) Probar que B es una matriz simétrica.

(ii) Probar que B es definida positiva.

(iii) ¿Es necesariamente B diagonalizable por semejanza?. Razona la respuesta.

(iv) ¿Puede ser la traza de B negativa?. Razona la respuesta.

(1.2 puntos)

4.– En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos $A = (1,0,0)$ y $B = (1,2,2)$.

(i) Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de A y B.

(ii) Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $z = 2$, de manera que el triángulo ABC sea isósceles con AB el lado desigual y tenga área $2\sqrt{3}$. ¿Es única la solución?.

(1.2 puntos)

5.– En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación de la base canónica. Se define la transformación ortogonal que en esta base tiene asociada la matriz

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Clasificarla indicando si procede el ángulo y semieje de giro y/o el subespacio de simetría.

(1.2 puntos)

6.– Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro $k \in R$:

$$x^2 + 4y^2 - 2kxy + 6x + 2ky = 0$$

a) Clasificar las cónicas en función de k.

b) Para $k = 2$ hallar la ecucación reducida, la excentricidad y la distancia de un vértice a un foco.

c) Hallar los valores de k para los cuales la recta $x = 0$ es tangente a la cónica.

(1.6 puntos)

7.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 6xz - 2x + 4y - 6z + 3 = 0.$$

i) Clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

ii) ¿Existe algún plano que corte a la superficie en una parábola?.

(1 punto)

8.– Hallar la ecuación de una cónica que tiene por focos los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2)$ y por excentricidad $e = \sqrt{5}$.

(1.2 puntos)

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **15 de Xulio 2013**

1.– Sexa $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ unha forma cuadrárica. Se sabe que:

- Os vectores $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ son unha base de vectores conxugados.
- w ten rango 1.
- $(0,1,0)$ é un vector autoconxugado.
- $w(1,2,0) = 1$.

i) Atopar a matriz asociada a w respecto da base canónica.

ii) Clasificar w.

iii) Atopar todos os vectores autoconxugados de w.

(1.4 puntos)

2.– No espazo afín se considera o producto escalar dado pola matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & a \\ 1 & b & c \end{pmatrix}.$$

Sexan os puntos $A = (1,2,0)$, $B = (1,3,1)$ e las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (1,2,-1) + \lambda(0,1,2).$$

Atopar a, b, c sabendo que $d(A,B) = 3$ e que as rectas r e s son perpendiculares.

(1.2 puntos)

3.– Sexa $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ unha matriz non singular e $B = AA^t$.

(i) Probar que B é unha matriz simétrica.

(ii) Probar que B é definida positiva.

(iii) É necesariamente B diagonalizable por semellanza?. Razoa a resposta.

(iv) Pode ser a traza de B negativa?. Razona la resposta.

(1.2 puntos)

4.– No espazo afín euclideo e respecto á referencia canónica se consideran os puntos $A = (1,0,0)$ e $B = (1,2,2)$.

(i) Atopar o lugar xeométrico de puntos que equidistan de A e B.

(ii) Atopar as coordenadas dun punto C no plano $z = 2$, de manera que o triángulo ABC sexa isósceles con AB o lado desigual e teña área $2\sqrt{3}$. É única a solución?.

(1.2 puntos)

5.– En $\mathbb{R}^3$ consideramos o producto escalar usual e a orientación da base canónica. Se define a transformación ortogonal que nesta base ten asociada a matriz

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Clasificala indicando se procede o ángulo e semiexo de xiro e/ou subespazo de simetría.

(1.2 puntos)

6.– Se considera a familia de cónicas dependente do parámetro $k \in R$:

$$x^2 + 4y^2 - 2kxy + 6x + 2ky = 0$$

a) Clasificar as cónicas en función de k.

b) Para $k = 2$ atopar a ecucación reducida, a excentricidade e a distancia dun vértice a un foco.

c) Atopar os valores de k para os cales a recta $x = 0$ é tanxente á cónica.

(1.6 puntos)

7.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 6xz - 2x + 4y - 6z + 3 = 0.$$

i) Clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

ii) Existe algún plano que corte á superficie nunha parábola?.

(1 punto)

8.– Atopar a ecuación dunha cónica que ten por focos os puntos $(0, 0)$ e $(1, 2)$ e por excentricidade $e = \sqrt{5}$.

(1.2 puntos)
