Álgebra Lineal II **Examen Final**

Ejercicio 2 (1 hora y 30 min.) **12 de junio de 2012**

1.– *Dada la ecuación:*

$$xy + xz + yz + 1 = 0,$$

clasificar la cuádrica que define y esbozar un dibujo de la misma.

Para clasificar la cuádrica diagonalizamos por congruencia la matriz asociada a la misma, teniendo en cuenta que para que la matriz de paso represente un cambio de coordenadas afines, la cuarta fila no puede se sumada a las demás, multiplicada por un número o cambiada de posición.

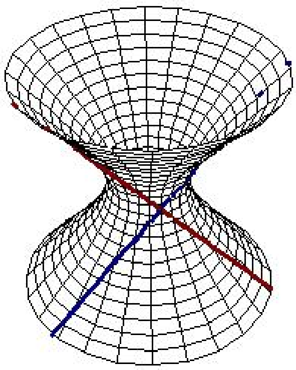
La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hacemos la diagonalización bajo las condiciones indicadas previamente:

$$A \overset{H_{12}(1/2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{12}(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1/2)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1/2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La distribución de signos en la diagonal queda $(+, -, -; +)$ o equivalentemente $(+, +, -; -)$. Se trata de un hiperboloide de una hoja.



(0.5 puntos)

2.– *Sea $A = (1, 1)$ y la cónica C de ecuación:*

$$4x^2 + y^2 = 8$$

(i) *Calcular los focos, la excentricidad y las directrices de C.*

Dividiendo la ecuación por 8 obtenemos directamente su la forma reducida:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \iff \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1.$$

Se trata de una elipse de semiradio mayor $a = 2\sqrt{2}$ y semiradio menor $b = \sqrt{2}$. Hay que observar también que el eje focal es el eje OY ya que el denominador del término y^2 en la forma reducida es mayor que el del término x^2.

Los focos tiene por tanto coordenadas $(0, c)$ y $(0, -c)$ con

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6}.$$

Es decir $F = (0, \sqrt{6})$ y $F' = (0, -\sqrt{6})$.

Las directrices son las rectas polares de los focos. La matriz asociada a la cónica es:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Por tanto las directrices quedan:

$$(0, \sqrt{6}, 1)B(x, y, 1)^t = 0 \iff \sqrt{6}y - 8 = 0$$

y

$$(0, -\sqrt{6}, 1)B(x, y, 1)^t = 0 \iff -\sqrt{6}y - 8 = 0.$$

La excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{48}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(ii) *Calcular las tangentes a la cónica que pasan por el punto* $(2, 0)$.

Calcularemos la recta polar r_P del punto $P = (2, 0)$. Las rectas tangentes son las que unen los puntos de corte de la rectar polar y la cónica con el punto P.

La recta polar de P es:

$$(2, 0, 1)B(x, y, 1)^t = 0 \iff 8x - 8 = 0 \iff x = 1.$$

Cortamos tal recta con la cónica resolviendo el sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 1 \\ 4x^2 + y^2 &= 8 \end{aligned} \right.$$

Queda:

$$4 + y^2 = 8 \iff y = \pm\sqrt{4}$$

y así $r_p \cap C = \{N, M\}$ con $M = (1, 2)$ y $N = (1, -2)$.

Las tangentes pedidas son la recta PM:

$$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - 0}{2 - 0} \iff 2x + y - 4 = 0$$

y la recta PN:

$$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - 0}{-2 - 0} \iff 2x - y - 4 = 0$$

(iii) *Hallar la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos simétricos de A respecto los puntos de la cónica C. ¿Qué tipo de curva se forma?. Hallar su centro.*

Sea $A' = (x_0, y_0)$ un punto simétrico de A respecto de un punto de la cónica. Entonces el punto medio de A y A':

$$\frac{A + A'}{2} = \left(\frac{x_0 + 1}{2}, \frac{y_0 + 1}{2} \right).$$

debe de yacer en la cónica y por tanto satisfacer su ecuación:

$$4\frac{(x_0+1)^2}{4} + \frac{(y_0^2+1)^2}{4} = 8.$$

Simplificando queda:

$$4x_0^2 + y_0^2 + 8x_0 + 2y_0 - 27 = 0,$$

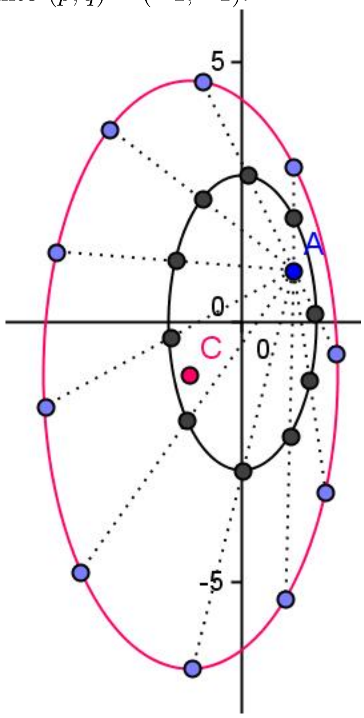
que es la ecuación del lugar geométrico pedido. Se trata de nuevo de una cónica. Sus matrices asociadas y cuadrática son respectivamente:

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -27 \end{pmatrix}, \qquad T' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se cumple que $det(A) = -124$ y $det(T) = 4 > 0$. Por tanto es una elipse. Su centro es el punto (p, q) verificando:

$$(p, q, 1)A = (0, 0, h) \iff 4p + 4 = 0, \qquad q + 1 = 0.$$

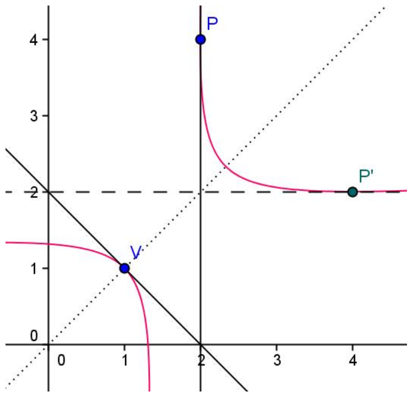
Deducimos que el centro es el punto $(p, q) = (-1, -1)$.



(1.6 puntos)

3.– *Calcular la ecuación de una cónica con vértice en el punto $V(1,1)$, que pasa por el punto $(2,4)$ y tal que las rectas $x + y - 2 = 0$ y $x = 2$ son tangentes a ella.*

La recta $x + y - 2 = 0$ pasa por el vértice $V(1,1)$ y por tanto es tangente a la cónica en ese punto. La perpendicular a ella es un eje de la cónica. Nos permitirá calcular el simétrico de la otra tangente. Tendremos dos tangentes y puntos de tangencia; mediante un haz de cónicas e imponiendo que la cónica pedida pase por $(1,1)$ obtendremos la curva pedida.



1) Calculamos primero el eje. El vector normal de $x + y - 2 = 0$ es $(1, 1)$. Por tanto el eje es la recta que pasa por $V(1, 1)$ y tiene por vector director $(1, 1)$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} \iff x - y = 0.$$

2) Calculamos el simétrico de la recta $x = 2$ por la recta $x - y = 0$. Para ello primero intersecamos las dos rectas:

$$x = 2, \quad x - y = 0 \qquad \iff (x, y) = (2, 2).$$

Calculamos ahora el simétrico del punto $P(2, 4)$ por la recta $x - y = 0$. Tal simétrico $P'(p, q)$ cumple:

$$\frac{P + P'}{2} \in \text{Eje de simetría} \qquad P' - P \perp \text{Eje}$$

De donde obtenemos:

$$\frac{2+p}{2} - \frac{4+q}{2} = 0, \qquad (p-2, q-4) \cdot (1, 1) = 0$$

y resolviendo $(p, q) = (4, 2)$.

La recta simétrica es la que une $(2, 2)$ y $(4, 2)$, es decir, la recta $y = 2$.

3) Formamos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia $x = 2$ tangente en $(2, 4)$ e $y = 2$ tangente en $(4, 2)$. La recta que une los puntos de tangencia es:

$$x + y = 6.$$

El haz queda:

$$\lambda(x-2)(y-2) + (x+y-6)^2 = 0$$

4) Finalmente imponemos que pase por el punto $(1, 1)$:

$$\lambda(1-2)(1-2) + (1+1-6)^2 = 0 \iff \lambda = -16.$$

La cónica queda:

$$(x+y-6)^2 - 16(x-2)(y-2) = 0$$

Simplificando:

$$x^2 + y^2 - 14xy + 20x + 20y - 28 = 0.$$

(1.5 puntos)

4.– *Consideramos el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Calcular las ecuaciones de un giro que lleve el eje OX en la recta de ecuaciones implícitas:*

$$r \equiv \begin{cases} 0 = x - y - 1 \\ 0 = y - z \end{cases}$$

El eje de giro es perpendicular a la recta inicial y a la recta girada. Por tanto su dirección puede ser obtenida como el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas.

El vector director del eje OX es $(1,0,0)$.

Para hallar vector director de la recta r, pasamos sus ecuaciones a paramétricas:

$$x - y - 1 = 0, \quad y - z = 0 \iff x = y + 1, \quad z = y \iff (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(1,1,1).$$

El producto vectorial de ambos es:

$$(1,0,0) \times (1,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (0,-1,1).$$

Tomaremos como semieje de giro aquel con vector director $(0,-1,1)$.

El ángulo α es el que forman las dos rectas:

$$cos(\alpha) = \frac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{\|(1,0,0)\|\|(1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Su signo coincide con la orientación de la base formada por: el semieje de giro, el vector director de la recta inicial y el de la recta girada:

$$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

Por tanto:

$$sin(\alpha) = +\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = +\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Para formar la matriz de giro construimos una base ortonormal bien orientada, tomando como primer vector el semieje de giro normalizado.

Los vectores ortogonales a $(0,-1,1)$ cumplen:

$$(x,y,z)\cdot(0,-1,1) = 0 \iff y - z = 0$$

Tomamos como segundo vector $(0,1,1)$. Los vectores perpendiculares a él y al primero cumplen:

$$y - z = 0 \quad \text{y} \quad (x,y,z)\cdot(0,1,1) = 0 \iff y + z = 0.$$

Tomamos como tercer vector $(1,0,0)$.

Comprobamos la orientación de la base $B' = \{(0,-1,1),(0,1,1),(1,0,0)\}$:

$$det(M_{CB'}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

Corregimos la orientación cambiando de signo el segundo vector y además normalizamos la base. Nos queda:

$$B = \{(0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(0,-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}),(1,0,0)\}$$

En tal base la matriz asociada al giro es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base canónica:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = M_{CB} T_B M_{CB}^t$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

que es una matriz de cambio de base ortogonal por ser entre dos bases ortonormales.

Operando queda:

$$T_C = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 & (3+\sqrt{3})/6 & (-3+\sqrt{3})/6 \\ \sqrt{3}/3 & (-3+\sqrt{3})/6 & (3+\sqrt{3})/6 \end{pmatrix}.$$

Finalmente para escribir las ecuaciones del giro escogemos un punto fijo del mismo. En este caso la intersección entre las rectas dadas. El punto $(1, 0, 0)$. Las ecuaciones quedan:

$$t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(1.4 puntos)