Álgebra Lineal II **Examen Final**

Ejercicio 1 (1 hora y 30 min.) **12 de junio de 2012**

1.– *Sea el espacio euclideo* $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada* $a, b \in R$*, se considera un endomorfismo* $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.*

La condición para que un endomorfismo de un espacio eculideo sea una trasnformación ortogonal es que su matriz asociada respecto a una base ortonormal sea ortogonal (es decir, su inversa coincida con su traspuesta). Por tanto ha de cumplirse:

$$TT^t = Id \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}^t = Id \qquad \iff \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{3a+4b}{5} \\ 0 & \dfrac{3a+4b}{5} & a \end{pmatrix} = Id$$

De donde:

$$3a + 4b = 0, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$a = \frac{4}{5},\ b = \frac{-3}{5} \quad \text{ó} \quad a = \frac{-4}{5},\ b = \frac{3}{5}$$

(ii) *Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortogonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.*

Estudiaremos los dos casos obtenidos en el apartado anterior. Para clasificar necesitaremos conocer la traza y el determinantes de la matriz asociada. Se tiene:

$$det(T) = \frac{4a - 3b}{5}, \qquad traza(T) = b.$$

CASO I: $a = \dfrac{4}{5}, \quad b = \dfrac{-3}{5}, \quad det(T) = 1, \quad traza(T) = \dfrac{-3}{5}.$

Como $det(T) = 1$ se trata de un giro. El ángulo de giro α cumple:

$$1 + 2cos(\alpha) = -\frac{3}{5} \Rightarrow cos(\alpha) = -\frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \pm arcos(-4/5).$$

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)(x, y, z)^t = 0 \iff -x + y = 0, \quad 4x - 8z = 0$$

Tomamos:

$$S_1 = \{(2, 2, 1)\}$$

Finalmente determinamos el signo del ángulo de giro. Para ello tomamos una base formada por el semieje de giro, un vector independiente de éste y su imagen. La orientación de tal base es el signo del ángulo de giro:

$$B = \{(2,2,1),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(2,2,1),(1,0,0),(0,3/5,4/5)\}, \quad det(M_{BC}) = -1 < 0$$

Por tanto se trata de un giro de ángulo $-arcos(-4/5)$ y semieje generado por $(2,2,1)$.

CASO II: $a = \frac{-4}{5}, \quad b = \frac{3}{5}, \quad det(T) = -1, \quad traza(T) = \frac{3}{5}.$

Como $det(T) = 1$ se trata de un giro compuesto con una simetría. El ángulo de giro α cumple:

$$-1 + 2cos(\alpha) = \frac{3}{5} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \pm arcos(4/5).$$

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al autovalor -1:

$$(T + Id)(x,y,z)^t = 0 \iff x + y = 0, \quad -4x + 8z = 0$$

Tomamos:

$$S_1 = \{(2,-2,1)\}$$

Determinamos el signo del ángulo de giro. Para ello tomamos una base formada por el semieje de giro, un vector independiente de éste y su imagen. La orientación de tal base es el signo del ángulo de giro:

$$B = \{(2,-2,1),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(2,-2,1),(1,0,0),(0,3/5,-4/5)\}, \quad det(M_{BC}) = -1 < 0$$

Finalmente el plano de simetría es perpendicular al semieje:

$$S_{-1}^{\perp} = \{(x,y,z) \in R^3 | (x,y,z) \cdot (2,-2,1) = 0\} = \{(x,y,z) \in R^3 | 2x - 2y + z = 0\}.$$

Por tanto se trata de un giro de ángulo $-arcos(4/5)$, semieje generado por $(2,-2,1)$ compuesto con una simetría respecto al plano de ecuación implícita $2x - 2y + z = 0$.

(1.6 puntos)

2.– *Consideramos el espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$*, la forma bilineal* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *y la base* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$*. Supongamos que*

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$*. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Se verifica que* $f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = a + 1$*.*

Verdadero. Basta tener en cuenta que:

$$f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f((1,0)_B, (1,1)_B) = (1,0)F_B(1,1)^t = a + 1.$$

Por tanto la afirmación es cierta.

(ii) *Si* $a = -2$*, entonces* f *es antisimétrica.*

Falso. Si $a = -2$ la matriz asociada es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

No es una matriz antisimétrica porque no tiene ceros en la diagonal y por tanto $F^t \neq -F$. Deducimos entonces que la correspondiente forma bilineal no es antisimétrica.

(iii) *Si* $\vec{v} \neq \vec{0}$*, entonces* $f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$*.*

Falso. Si $det(F_B) = 0$ entonces existen vectores no nulos tales que $\vec{v}F_V = \vec{0}$. Y por tanto $f(\vec{v}, \vec{v}) = 0$. En nuestro caso:

$$det(F_B) = 1 - 2a.$$

Entonces si $a = -1/2$ y tomamos $\vec{v} = (-2,1)$ se tiene:

$$f(\vec{v}, \vec{v}) = (-2,1)F_B(-2,1)^t = 0.$$

(1 punto)

3.– *Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el triángulo ABC en $A'B'C'$ sabiendo que:*

$$A = (1,1), \quad B = (3,2), \quad C = (2,4), \quad A' = (2,3), \quad superficie(A'B'C') = 10.$$

Una homotecia de razón k modifica las áreas con razón k^2. Por tanto:

$$k^2 = \frac{sup(A'B'C')}{sup(ABC)}.$$

Para hallar el área de ABC consideramos sus puntos situados en el plano 0 y utilizamos la interpretación geométrica del producto vectorial:

$$sup(ABC) = \frac{1}{2}\|AB \times AC\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3-1 & 2-1 & 0 \\ 2-1 & 4-1 & 0 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|(0,0,5)\| = \frac{5}{2}.$$

Por tanto:

$$k^2 = \frac{10}{5/2} = 4 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 2.$$

Por otra parte una razón de centro (x_0, y_0) y razón k tiene por ecuación:

$$t(x,y) = (x_0, y_0) + k(x - x_0, y - y_0)$$

Imponemos que $t(A) = A'$:

$$t(1,1) = (2,3) \Rightarrow (x_0, y_0) + k(1 - x_0, 1 - y_0) = (2,3) \Rightarrow (x_0, y_0) = \frac{1}{1-k}(2-k, 3-k).$$

Por tanto tenemos dos posibles homotecias:

- Para $k = 2$, la homotecia de centro $(0, -1)$ y razón 2 de ecuación:

$$t(x,y) = (0,-1) + 2(x - 0, y + 1) = (0,1) + 2(x,y)$$

- Para $k = -2$, la homotecia de centro $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ y razón -2 de ecuación:

$$t(x,y) = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3}) - 2(x - \frac{4}{3}, y - \frac{5}{3}) = (4,5) - 2(x,y)$$

(1.1 puntos)

4.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Se considera la aplicación:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx - 2p(0)q(0).$$

(i) *Probar que f es una forma bilineal simétrica.*

1) Primero veamos que es simétrica, es decir:

$$f(p(x), q(x)) = f(q(x), p(x)).$$

Es inmediato sin más que tener en cuenta que:

$$f(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx - 2p(0)q(0) = \int_{-1}^{1} q(x)p(x)dx - 2q(0)p(0) = f(q(x), p(x)).$$

2) Probaremos ahora que es bilineal. Por ser simétrica basta comprobarlo en la primera componente:

$$f(ap_1(x) + bp_2(x), q(x)) = af(p_1(x), q(x)) + bf(p_2(x), q(x)).$$

Veámoslo:

$$\begin{aligned}
f(ap_1(x) + bp_2(x), q(x)) &= \int_{-1}^{1} (ap_1(x) + bp_2(x))q(x)dx - 2(ap_1(0) + bp_2(0))q(0) = \\
&= \int_{-1}^{1} (ap_1(x)q(x) + bp_2(x)q(x))dx - 2ap_1(0)q(0) - 2bp_2(0)q(0) = \\
&= a\int_{-1}^{1} p_1(x)q(x)dx + b\int_{-1}^{1} p_2(x)q(x)dx - 2ap_1(0)q(0) - 2bp_2(0)q(0) = \\
&= a\left(\int_{-1}^{1} p_1(x)q(x)dx - 2p_1(0)q(0)\right) + b\left(\int_{-1}^{1} p_2(x)q(x)dx - 2p_2(0)q(0)\right) = \\
&= af(p_1(x), q(x)) + bf(p_2(x), q(x))
\end{aligned}$$

(ii) *Calcular la matriz asociada a f en al base canónica.*

Sea $C = \{e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2\}$. Por definición de matriz asociada:

$$(F_C)_{i,j} = f(e_i(x), e_j(x)).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
f(e_1(x), e_1(x)) &= \int_{-1}^{1} e_1(x)e_1(x)dx - 2e_1(0)e_1(0) = \int_{-1}^{1} dx - 2 = 0. \\
f(e_1(x), e_2(x)) &= \int_{-1}^{1} e_1(x)e_2(x)dx - 2e_1(0)e_2(0) = \int_{-1}^{1} xdx - 0 = 0. \\
f(e_1(x), e_3(x)) &= \int_{-1}^{1} e_1(x)e_3(x)dx - 2e_1(0)e_3(0) = \int_{-1}^{1} x^2dx - 0 = \frac{2}{3}. \\
f(e_2(x), e_2(x)) &= \int_{-1}^{1} e_2(x)e_2(x)dx - 2e_2(0)e_2(0) = \int_{-1}^{1} x^2dx - 0 = \frac{2}{3}. \\
f(e_2(x), e_3(x)) &= \int_{-1}^{1} e_2(x)e_3(x)dx - 2e_2(0)e_3(0) = \int_{-1}^{1} x^3dx - 0 = 0. \\
f(e_3(x), e_3(x)) &= \int_{-1}^{1} e_3(x)e_3(x)dx - 2e_3(0)e_3(0) = \int_{-1}^{1} x^4dx - 0 = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Por ser simétrica la forma bilineal, la matriz es simétrica y queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Dar un conjunto de polinomios que forme una base de vectores conjugados.*

Una base es de vectores conjugados si y sólo si la matriz asociada a la forma bilineal en tal base es diagonal. Entonces diagonalizaremos la matriz F_C por congruencia y las filas de la matriz de paso serán las coordenadas de los vectores de la base de vectores conjugados respecto de la base canónica:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{13}} \xrightarrow{\mu_{13}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2/5 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_{31}(-5/3)} \xrightarrow{\mu_{31}(-5/3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10/9 & 1 & 0 & -5/3 \end{array}\right)$$

Por tanto una base de vectores conjugados es:

$$B = \{x^2, x, 1 - \frac{5}{3}x^2\}$$

(iv) *Calcular los polinomios autoconjugados.*

Son aquellos que cumplen $f(p(x), p(x)) = 0$. Por tener la matriz asociada determinante no nulo, la forma cuadrática es no degenerada y los vectores autoconjugados no pueden descomponerse en dos planos. Si trabajamos respecto de la base canónica, son los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2$ de coordenadas $(a_0, a_1, a_2)_C$ verificando:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{2}{3}a_1^2 + \frac{4}{3}a_0a_2 + \frac{2}{5}a_2^2 = 0.$$

(v) *Clasificar la forma cuadrática asociada a f.*

La hemos diagonalizado en (iii), donde hemos visto que la signatura es $(2, 1)$. Se trata por tanto de una forma cuadrática no degenerada e indefinida.

(1.3 puntos)