Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio 2 (1 hora y 30 min.) **14 de julio de 2012**

1.– *Dada la ecuación:*

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 4x + 2y + 4z + 1 = 0,$$

clasificar la cuádrica que define y esbozar un dibujo de la misma.

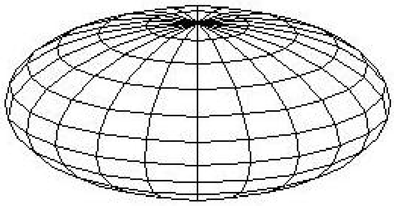
La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia, teniendo en cuenta que para que las operaciones elementales representen un cambio de referencia afín la última fila no puede ser cambiada de lugar, sumada a otras o multiplicada por un número.

$$A \underset{H_{21}(-1)}{\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}} \underset{H_{31}(-1)}{\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow}} \underset{H_{41}(-2)}{\overset{\mu_{41}(-2)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{H_{41}(1)}{\overset{\mu_{42}(1)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La distribución de signos en la forma diagonal es $(+,+,+;-)$. Se trata por tanto de un elipsoide real.



(0.5 puntos)

2.– *Dada la cónica de ecuación*

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0$$

(i) *Clasificarla y hallar la ecuación reducida.*

Las matrices asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$det(A) = -16, \qquad det(T) = 8$$

y por tanto se trata de una elipse real.

Para hallar la ecuación reducida calculamos los autovalores de T:

$$|T - \lambda Id| = (3-\lambda)^2 - 1^2 = (2-\lambda)(4-\lambda)$$

de manera que los autovalores (las raíces del polinomio característico quedan):

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 4.$$

La forma reducida es:

$$2x'^2 + 4y'^2 + d = 0$$

con

$$d = \frac{det(A)}{\lambda_1\lambda_2}) = \frac{-16}{8} = -2.$$

Queda:

$$2x'^2 + 4y'^2 - 2 = 0 \iff x'^2 + 2y'^2 - 1 = 0$$

o en forma canónica:

$$\frac{x'^2}{1^2} + \frac{y'^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1.$$

(ii) *Calcular el centro, los ejes, los vértices, los focos y la excentricidad.*

El centro es el punto (a, b) verificando:

$$(a, b, 1)A = (0, 0, h) \iff 3a + b - 2 = 0, \quad a + 3b - 2 = 0.$$

resolviendo obtenemos el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de t asociados a autovalores no nulos.

Hallamos los autovectores:

- Asociados a $\lambda_1 = 2$:

$$(T - 2Id)(x, y)^t = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, -1)\}.$$

- Asociados a $\lambda_4 = 4$:

$$(T - 4Id)(x, y)^t = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, 1)\}.$$

Los ejes quedan:

$$\begin{aligned} (1, -1, 0)A(x, y, 1)^t = 0 &\iff 2x - 2y = 0 \iff x - y = 0 \\ (1, 1, 0)A(x, y, 1)^t = 0 &\iff 4x + 4y - 4 = 0 \iff x + y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Los vértices son la intersección de los ejes con la cónica.

Intersecamos el primer eje:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

resolviendo obtenemos $V_1 = (0, 0)$, $V_2 = (1, 1)$.

Intersecamos el segundo eje:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

resolviendo obtenemos $V_3 = (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$, $V_4 = (\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2})$.

Los focos en la nueva referencia son $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ con:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2.$$

La ecuación de cambio de referencia es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{centro} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{autovectores\ \ de\ \ T\ \ normalizados} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Cambiamos los focos de referencia mediante esa ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{-\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

es decir los focos son los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$.

Finalmente la excentricidad es:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}/2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(1.5 puntos)

3.– *Calcular las ecuaciones de todas las cónicas que tienen a la recta $x = 0$ por asíntota, un eje es la recta $y - 2x = 0$ y un vértice sobre la recta $x = 1$.*

Hallamos el simétrico de la asiíntota por el eje, que será la segunda asínotota de la cónica buscada.

Para ello primero intersecamos el eje y la asíntota resolviendo el sistema que forman sus dos ecuaciones:

$$x = 0, \quad y - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (0, 0).$$

Ahora tomamos otro punto de la asíntota $P = (0, 1)$ y hallamos su simétrico $P' = (a, b)$ respecto del eje. Se cumple:

$$\frac{(0,1) + (a,b)}{2} \in eje, \qquad ((a,b) - (0,1)) \perp eje.$$

De ahí obtenemos la ecuaciones:

$$\frac{1+b}{2} - a = 0, \qquad a + 2b - 2 = 0.$$

Resolviendo obtenemos $(a, b) = (4/5, 3/5)$.

Por tanto la segunda asíntota es la recta que une $(0,0)$ y $(4/5, 3/5)$:

$$\frac{x-0}{4/5} = \frac{y-0}{3/5-0} \iff 3x - 4y = 0.$$

Formamos el haz de cónicas conocidas dos asíntotas:

$$x(3x - 4y) + \lambda = 0.$$

Usamos ahora que un vértice está en la recta $x = 1$. Puede haber dos casos:

1) El vértice está en el eje dado. Entonces verifica las ecuaciones:

$$y - 2x = 0, \qquad x = 1 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (1, 2).$$

Se trata por tanto del punto $(1, 2)$. Sustituyendo en el haz queda:

$$1(3 - 8) + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 5$$

y la cónica resulta:

$$3x^2 - 4xy + 5 = 0.$$

2) El vértice está en el eje perpendicualar al dado. Tal eje pasa por el centro de la cónica que es la intersección del eje dado y de la asíntota, es decir, el punto $(0,0)$. Su vector director es el normal del eje conocido $(-2,1)$. Por tanto su ecuación es:

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} \iff x + 2y = 0.$$

Intersecamos con $x = 1$:

$$x + 2y = 0, \qquad x = 1 \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (1, -1/2)$$

Sustituyendo en el haz queda:

$$1(3+2) + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -5$$

y la cónica resulta:

$$3x^2 - 4xy - 5 = 0.$$

(1.5 puntos)

4.– *Hallar las ecuaciones de una simetría del plano afín que deje fijo el punto* $(0,1)$ *y lleve el punto* $(1,3)$ *en* $(2,2)$.

La recta de simetría pasa por el punto fijo y es perpendicular al vector que une un punto y su simétrico. Tal vector es:

$$(2,2) - (1,3) = (1,-1).$$

Por tanto el eje es de la forma:

$$x - y + c = 0.$$

Imponiendo que pase por $(0,1)$ queda:

$$0 - 1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1.$$

Es decir el eje de simetría es la recta $x - y + 1 = 0$.

La ecuación de la simetría será de la forma:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + S\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

donde S es la matriz de la simetría respecto al subespacio $x - y = 0$. Para hallar tal matriz tomamos una base formada por el vector director del eje y uno perpendicular al mismo:

$$B = \{(1,1), (1,-1)\}$$

En tal base la matriz es:

$$S_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La pasamos a la base canónica:

$$S_C = M_{CB} S_B M_{CB}^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación de la simetría queda:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

(1.5 puntos)
