Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio 1 (1 hora y 30 min.) **14 de julio de 2012**

1.– *Fijados $a, b \in \mathbb{R}$ se definie la forma cuadrática:*

$$w : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x,y,z,t) = x^2 + ay^2 + 2bxy + 2byt + 2bzt$$

(i) *Hallar el rango, signatura y clasificar w en función de los valores a y b.*

La matriz asociada a la forma cuadrática respecto de la base canónica es:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar su signatura y clasificarla la diagonalizamos por congruencia:

$$F \overset{\substack{\mu_{21}(-b) \\ H_{21}(-b)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora distinguimos dos casos:

i) Si $a \neq b^2$, continuamos:

$$\overset{\substack{\mu_{32}(-b/(a-b^2)) \\ H_{32}(-b/(a-b^2))}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & \dfrac{-b^2}{a-b^2} \end{pmatrix} \overset{\substack{\mu_{34} \\ H_{34}}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-b^2}{a-b^2} & b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Dos subcasos:

i.a) Si $b \neq 0$:

$$\overset{\substack{\mu_{43}((a-b^2)/b) \\ H_{43}((a-b^2)/b)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-b^2}{a-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b^2 \end{pmatrix}$$

i.b) Si $b = 0$, directamente queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Si $a = b^2$, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mu_{24}(1) \\ H_{24}(1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & b & b \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mu_{32}(-1/2) \\ H_{32}(-1/2) \\ \mu_{42}(-1/2) \\ H_{42}(-1/2)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/2 & b/2 \\ 0 & 0 & b/2 & -b/2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mu_{43}(1) \\ H_{43}(1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que los casos que hemos ido distinguiendo dependen de las condiciones $a = b^2$ y $b = 0$. Por tanto hacemos la siguiente tabla:

	$b < 0$		$b = 0$		$b > 0$	
$a > b^2$	$sig(3,1)$	$rg = 4$	$sig(2,0)$	$rg = 2$	$sig(3,1)$	$rg(4)$
$a = b^2$	$sig(2,1)$	$rg = 3$	$sig(1,0)$	$rg = 1$	$sig(2,1)$	$rg(3)$
$a < b^2$	$sig(2,2)$	$rg = 4$	$sig(1,1)$	$rg = 2$	$sig(2,2)$	$rg(4)$

y la consiguiente clasificación:

	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
$a > b^2$	no degenerada, indefinida	degenerada, semidef. positiva	no degenerada, indefinida
$a = b^2$	degenerada, indefinida	degenerada, semidef. positiva	degenerada, indefinida
$a < b^2$	no degenerada, indefinida	degenerada, indefinida	no degenerada, indefinida

(ii) *Para aquellos valores para los cuáles la forma cuadrática es degenerada calcular una base del núcleo.*

Hay tes casos:

i) $b \neq 0$ y $a = b^2$. El núcleo está formado por los vectores (x, y, z, t) tales que:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$x + by = 0, \quad bx + b^2y + bt = 0, \quad bt = 0, \quad by + bz = 0.$$

Como $b \neq 0$ resulta:

$$ker(w) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | z = -y, \quad x = -by, \quad t = 0\} = \mathcal{L}\{(-b, 1, -1, 0)\}$$

ii) $b = 0$ y $a \neq 0$. El núcleo está formado por los vectores (x, y, z, t) tales que:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$x = 0, \quad ay = 0$$

Como $a \neq 0$ resulta:

$$ker(w) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = y = 0\} = \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

iii) $b = a = 0$. El núcleo está formado por los vectores (x, y, z, t) tales que:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$ker(w) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0\} = \mathcal{L}\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

(iii) *Si $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal simétrica asociada a w, para $a = b = 1$ calcular $f((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1))$.*

Simplemente:

$$f((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

(1.5 puntos)

2.– *Consideramos el espacio ecuclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.*

FALSO. Por ejemplo si T es una matriz de giro de 90 grados queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica.

(ii) *Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.*

VERDADERO. La condición para que una transformación sea ortonormal es que la matriz asociada respecto a una base ortonormal cumpla $TT^t = Id$. Esto equivale a $T^{-1} = T^t$.

(iii) *Si T es una simetría respecto a una recta entonces $traza(T) = -1$.*

VERDADERO. Respecto a una base formada por el vector director de la recta y dos vectores más ortogonales a éste, la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene traza -1. Como la traza se conserva por semejanza, no depende de la base en la que trabajemos, y por tanto la afirmación es cierta.

(iv) Si $traza(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.

FALSO. La matriz de un giro de noventa grados compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al eje de giro, en una base adecuada es:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene traza -1, pero no es una simetría respecto a una recta.

(v) *Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.*

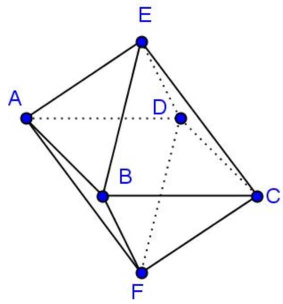
FALSO. La matriz de una simetría respecto a un plano es (respecto a una base adecuada):

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $T^{2012} = Id$ (giro de cero grados) pero T no es una matriz de giro.

(1.5 puntos)

3.– *En el espacio afín E_3 se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$ y $D = (1,0,-1)$.*



(i) *Hallar las coordenadas de todos los vértices del octaedro.*

El centro O del octaedro es el punto medio de los vértices B y D:

$$O = \frac{B+D}{2} = (1,0,0)$$

y también el punto medio de A y C. Por tanto:

$$O = \frac{A+C}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 2O - A = (2,0,0) - (0,0,0) = (2,0,0)$$

Finalmente los puntos E y F distan de los otros cuatro vértices el lado del octaedro. Tal lado mide:

$$d(A,B) = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

y así E y F son puntos $P = (x,y,z)$ cumpliendo:

$$\begin{array}{rcl} d(P,A) = \sqrt{2} & \Rightarrow & x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ d(P,B) = \sqrt{2} & \Rightarrow & (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2 \\ d(P,C) = \sqrt{2} & \Rightarrow & (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ d(P,D) = \sqrt{2} & \Rightarrow & (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2 \end{array}$$

Restando la primera y tercera ecuación obtenemos $x = 1$. De la segunda y la cuarta $z = 0$. Y de las otras $y^2 = 1$. Por tanto:

$$E = (1,1,0), \qquad F = (1,-1,0).$$

(ii) *Hallar su área, su volumen y el radio de la esfera circunscrita.*

El área es ocho veces el área de una cara:

$$A = 8 \cdot Area(A,B,E) = 8 \cdot \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AE}\| = 8 \cdot \frac{1}{2}\|(-1,1,1)\| = 4\sqrt{3}.$$

El volumen es dos veces el de la pirámide $ABCDE$:

$$B = 2 \cdot Vol(ABCDE) = 2 \cdot \frac{1}{3}|[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]| = \frac{2}{3}\left| det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Finalmente el radio de la esfera circunscrita es la distancia del centro del octaedro a cualquiera de sus vértices:

$$r = d(A,O) = \|(1,0,0)\| = 1.$$

(iii) *Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto medio de las aristas AE, BE y CF.*

Los puntos medios de las aristas AE, BE y CF son respectivamente:

$$M_{AE} = \frac{A+E}{2} = (1/2, 1/2, 0), \quad M_{BE} = \frac{C+E}{2} = (1, 1/2, 1/2), \quad M_{CF} = \frac{C+F}{2} = (3/2, -1/2, 0)$$

Usamos la ecuación del plano conocidos tres puntos:

$$\begin{vmatrix} x - 1/2 & y - 1/2 & z - 0 \\ 1 - 1/2 & 1/2 - 1/2 & 1/2 - 0 \\ 3/2 - 1/2 & -1/2 - 1/2 & 0 - 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x + y - z - 1 = 0.$$

(iv) *Probar que el plano π pasa por el punto medio de las aristas AD, BC y DF.*

Los puntos medios de las aristas AD, BC y DF son respectivamente:

$$M_{AD} = \frac{A+D}{2} = (1/2, 0, -1/2), \quad M_{BC} = \frac{B+E}{2} = (3/2, 0, 1/2), \quad M_{DF} = \frac{C+F}{2} = (1, -1/2, -1/2)$$

Comprobamos que satisfacen la ecuación $x + y - z - 1 = 0$:

- El punto M_{AD}:

$$\frac{1}{2} + 0 - \frac{-1}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Si.}$$

- El punto M_{BC}:

$$\frac{3}{2} + 0 - \frac{1}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Si.}$$

- El punto M_{DF}:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Si.}$$

(v) *Calcular el ángulo que forman dos caras del octaedro.*

Consideramos las caras ABE y ABF. El ángulo (obtuso) que forman las caras es el que forman los vectores normales de las mismas.

El vector normal de ABE es:

$$\vec{AB} \times \vec{AE} = (1,0,1) \times (1,1,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (-1,1,1).$$

El vector normal de ABF es:

$$\vec{AB} \times \vec{AF} = (1,0,1) \times (1,-1,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (1,1,-1).$$

El ángulo α que forman cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{-|(-1,1,1)\cdot(1,1,-1)|}{\|(-1,1,1)\|\|(1,1,1)\|} = \frac{-1}{3}$$

(el menos del numerador es para asegurarnos de tomar el ángulo obtuso): Por tanto:

$$\alpha = arcos\left(\frac{-1}{3}\right).$$

(vi) *Calcular la proyección ortogonal del punto E sobre el plano que contiene a los vértices DCF.*

Calculamos primero el plano DCF:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1-2 & 0-0 & -1-0 \\ 1-2 & -1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y - z - 2 = 0.$$

La proyección ortogonal de E sobre tal plano se obtiene intersecándolo con su perpendicular por E.

La perpendicular tiene como vector director el vector normal del plano. Es por tanto la recta de ecuación vectorial:

$$(x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,-1,-1)$$

Intersecamos con el plano:

$$(1+\lambda) - (1-\lambda) - (-\lambda) - 2 = 0 \iff 3\lambda = 2 \iff \lambda = \frac{2}{3}.$$

La proyección queda:

$$(1,1,0) + \frac{2}{3}(1,-1,-1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

(2 puntos)