Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio 1 (1 hora y 30 min.) **14 de julio de 2012**

1.– Fijados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z, t) = x^2 + ay^2 + 2bxy + 2byt + 2bzt$$

(i) Hallar el rango, signatura y clasificar w en función de los valores a y b.

(ii) Para aquellos valores para los cuáles la forma cuadrática es degenerada calcular una base del núcleo.

(iii) Si $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal simétrica asociada a w, para $a = b = 1$ calcular $f((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1))$.

(1.5 puntos)

2.– Consideramos el espacio ecuclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.

(ii) Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.

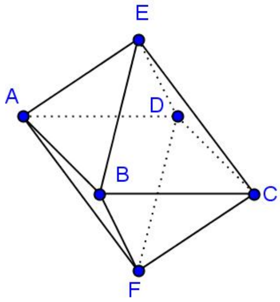
(iii) Si T es una simetría respecto a una recta entonces $traza(T) = -1$.

(iv) Si $traza(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.

(v) Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.

(1.5 puntos)

3.– En el espacio afín E_3 se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ y $D = (1, 0, -1)$.



(i) Hallar las coordenadas de todos los vértices del octaedro.

(ii) Hallar su área, su volumen y el radio de la esfera circunscrita.

(iii) Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto medio de las aristas AE, BE y CF.

(iv) Probar que el plano π pasa por el punto medio de las aristas AD, BC y DF.

(v) Calcular el ángulo que forman dos caras del octaedro.

(vi) Calcular la proyección ortogonal del punto E sobre el plano que contiene a los vértices DCF.

(2 puntos)

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio 1 (1 hora e 30 min.) **14 de xullo de 2012**

1.– Fixados $a, b \in \mathbb{R}$ se definie a forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z, t) = x^2 + ay^2 + 2bxy + 2byt + 2bzt$$

(i) Atopar o rango, a signatura e clasificar w en función dos valores a e b.

(ii) Para aqueles valores para os que a forma cuadrática é dexenerada calcular unha base do núcleo.

(iii) Se $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a forma bilineal simétrica asociada a w, para $a = b = 1$ calcular $f((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1))$.

(1.5 puntos)

2.– Consideramos o espazo ecuclideo $\mathbb{R}^3$ co producto escalar usual. Sexa $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ unha transformación ortogonal e T a matriz asociada a t respecto unha base B arbitraria. Razoar a falsedade ou veracidade das seguintes cuestións:

(i) Se B é unha base ortonormal entón T é simétrica.

(ii) Se B é unha base ortonormal entón $T^{-1} = T^t$.

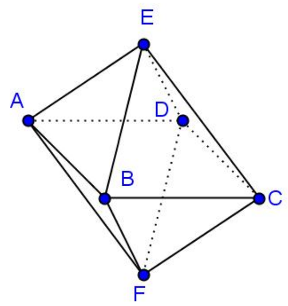
(iii) Se T é unha simetría respecto dunha recta entón $traza(T) = -1$.

(iv) Se $traza(T) = -1$ entón T é unha simetría respecto dunha recta.

(v) Se T^{2012} é un xiro entón T é un xiro.

(1.5 puntos)

3.– No espazo afín E_3 se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ y $D = (1, 0, -1)$.



(i) Atopar as coordenadas de todos os vértices do octaedro.

(ii) Atopar a súa área, o seu volume e o radio da esfera circunscrita.

(iii) Atopar a ecuación do plano π que contén ó punto medio das aristas AE, BE e CF.

(iv) Probar que o plano π pasa polo punto medio das aristas AD, BC e DF.

(v) Calcular o ángulo que forman dúas caras do octaedro.

(vi) Calcular a proxección ortogonal do punto E sobre o plano que contén óos vértices DCF.

(2 puntos)