Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio 2 (1 hora y 30 min.) **27 de mayo de 2011**

1.– *En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular $ABCD$ de la cual sabemos:*

- $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,0)$, $C=(0,1,1)$.

- El vértice D se encuentra en un plano paralelo a la base ABC y que pasa por el punto $P=(0,10,9)$.

- El vértice D equidista de los otros tres.

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

El volumen de la pirámide es:

$$V=\frac{base\cdot altura}{3}.$$

El área de la base es la del triángulo ABC:

$$\frac{1}{2}|\|\vec{AB}\times\vec{AC}\||=\frac{1}{2}|\|(0,-1,1)\|=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

La altura es la distancia del punto D a ABC; pero como el plano que contiene a D y es paralelo a ABC también pasa por $P=(0,10,9)$, $dis(D,ABC)=dis(P,ABC)$. El plano ABC tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\iff y-z=0.$$

La altura queda por tanto:

$$h=\frac{|10-9|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El volumen pedido será:

$$V=\frac{(\sqrt{2}/2)\cdot(1/\sqrt{2})}{3}=\frac{1}{6}.$$

(ii) *Hallar las coordenadas del vértice D.*

El vértice D se encuentra en el plano paralelo a ABC (cuya ecuación hemos calculado antes $y-z=0$) y pasando por P. Tal plano es de la forma:

$$y-z+k=0$$

e imponiendo que pase por P queda $10-9+k=0$, de donde $k=1$. Deducimos que el plano que contiene a D tien por ecuación:

$$y-z-1=0.$$

y por tanto podemos tomar D como:

$$D=(a,b+1,b)$$

Ahora usamos que el punto D equidista de los otros tres:

$$d(A,D)=D(B,D)\iff\sqrt{a^2+(b+1)^2+b^2}=\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2+b^2}$$
$$d(A,D)=D(C,D)\iff\sqrt{a^2+(b+1)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2+(b-1)^2}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y simplificando queda:

$$0 = 2a - 1$$
$$0 = 4b$$

Obtenemos que $a = 1/2$ y $b = 0$, con lo que $D = (1/2, 1, 0)$.

(iii) *Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano ABC.*

El plano está generado por los vectores $\vec{AB} = (1, 0, 0)$ y $\vec{AC} = (0, 1, 1)$. Un vector perpendicular a ambos es el vector normal al plano ABC, $(0, 1, -1)$. Construimos una base con esos tres vectores:

$$B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}.$$

En esa base la matriz de la simetría es:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos un cambio de base:

$$F_C = M_{CB'} F_{B'} M_{CB'}^{-1}.$$

donde:

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciónes de la simetría son (teniendo en cuenta que el origen es un punto fijo de la misma):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \\ z - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(iv) *Hallar el simétrico de P respecto de la simetría anterior.*

Simplemente usamos la fórmula hallada en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(2 puntos)

2.– *Se considera la familia de cónicas que depende del parámetro m:*

$$x^2 + m^2y^2 + 2xy + 2x + 2my + 2m = 0.$$

(i) *Clasificar las cónicas en función de m.*

La matriz asociada y de términos cuadráticos de la cónica son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & m \\ 1 & m & 2m \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m^2 \end{pmatrix}.$$

Para clasificar estudiamos los signos de $det(A)$ y $det(T)$. En particular nos fijamos cuando se anulan; serán los puntos límite de los posibles cambios de signos. Se tiene que:

$$det(T) = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$

$$det(A) = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2-1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{pmatrix} = (m-1)det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{pmatrix} = 2m^2(m-1)$$

Por tanto estudiamos los siguientes casos:

	$det(T)$	$det(A)$	Tipo de cónica
$m < -1$	> 0	< 0	Elipse real
$m = -1$	$= 0$	< 0	Parábola
$-1 < m < 0$	< 0	< 0	Hipérbola
$m = 0$	< 0	$= 0$	Rectas reales que se cortan
$0 < m < 1$	< 0	< 0	Hipérbola
$m = 1$	$= 0$	$= 0$	Rectas paralelas reales o complejas o recta doble
$m > 1$	> 0	> 0	Elipse imaginaria

En el caso $m = 1$ debemos de distinguir exactamente de que tipo de cónica se trata de las tres indicadas. La matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vemos que $rango(A) = 2$ y por tanto se trata de rectas paralelas reales o complejas; para distinguirlas intersecamos la cónica con una recta arbitraria; por ejemplo con $x = 0$:

$$y^2 + 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \pm \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}.$$

Las soluciones son complejas y por tanto se trata de dos rectas paralelas imaginarias.

(ii) *Para $m = -1$ hallar la ecuación reducida y el/los foco/focos.*

Para $m = -1$ se trata de una parábola. La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda x'^2 - 2cy' = 0.$$

donde λ es el autovalor no nulo de T y $-\lambda c^2 = det(A)$.

Calculamos los autovalores de T:

$$det(T - \lambda Id) = 0 \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 2).$$

El autovalor no nulo es $\lambda = 2$ y así:

$$c = \sqrt{\frac{det(A)}{\lambda}} = \sqrt{2}.$$

La ecuación reducida queda:

$$2x'^2 - 2\sqrt{2}y' = 0 \iff x'^2 = 2\frac{\sqrt{2}}{2}y'.$$

El foco, en la nueva referencia es el punto $(0, \sqrt{2}4)$. Para pasarlo a la referencia de partida necesitamos las ecuaciones de cambio de referencia.

Comenzamos calculando los autovectores de T:

$$(T - 2\lambda Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, 1)\}.$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, -1)\}.$$

Los autovectores son $(1, 1)$ y $(1, -1)$; el segundo, el asociado al cero, lo escogemos para que la parábola quede orientada en el semiplano positivo en su forma reducida. Debe de cumplirse que:

$$\vec{v} \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} < 0.$$

En nuestro caso:

$$(1, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} > 0.$$

Luego escogemos el $(-1, 1)$. Definitivamente los autovectores normalizados quedan:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)\}.$$

Ahora calculamos el vértice; es la intersección del eje con la cónica. El eje es la recta polar del autovector de T asociado al autovalor no nulo:

$$(1, 1, 0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y = 0.$$

Intersecamos el eje con la cónica:

$$\begin{aligned} 0 &= x + y \\ 0 &= x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y - 2 \end{aligned}$$

Despejando y en la primera y sustiyendo en la segunda queda:

$$4x - 2 = 0 \iff x = 1/2.$$

El vértice es el punto $(1/2, -1/2)$. Las ecuaciones de cambio de referencia son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Y finalmente el foco queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

(2 puntos)

3.– *Consideramos el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Calcular la matriz asociada T_C (respecto de la base canónica) de una transformación ortogonal $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que cumple:*

$$det(T_C) = -1, \qquad traza(T_C) = 1/5, \qquad t(0, 1, 0) = (0, -1, 0).$$

¿Es única la solución?.

Como la matriz asociada a la transformación ortgonal tiene determinante negativo, entonces es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al semieje de giro. En cierta base que en principio desconocemos, la matriz de la transformación es de la forma:

$$F_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(A) & -sin(A) \\ 0 & sin(A) & cos(A) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Y como la traza se conserva por cambios de base:

$$-1 + 2cos(A) = 1/5 \iff cos(A) = 3/5.$$

Además el semieje de giro está generado por un autovector asociado al -1 (único salvo múltiplo por ser un giro distinto de 180 grados). Tal vector nos es dado en el enunciado $(0, 1, 0)$.

En definitiva se trata de un giro de un ángulo A con $cos(A) = 3/5$ y semieje generado por $(0, 1, 0)$ compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular. Con los datos dados no podemos saber la orientación del giro, por lo que hay dos posibles transformaciones en las condiciones dadas, con:

$$sin(A) = +\sqrt{1 - cos(A)^2} = +4/5 \text{ ó } sin(A) = -\sqrt{1 - cos(A)^2} = -4/5.$$

Para hallar la matriz asociada a la transformación respecto de la base canónica, hallamos la base B y cambiamos de base la matriz $(*)$. B es una base ortonormal cuyo primer vector es el semieje de giro normalizado:

$$B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

En definitiva:

$$F_C = M_{CB} F_B M_{BC} = M_{BC}^{-1} F_B M_{BC}.$$

Donde:

$$M_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & \pm 4/5 \\ 0 & \mp 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

y $M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$ por se una matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales.

Operando queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & \mp 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ \pm 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

(1 punto)