Álgebra Lineal II — Soluciones de Examen Final

Ejercicio 1 (1 hora y 40 min.) **27 de mayo de 2011**

1.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales. Consideramos la forma bilineal:*

$$\phi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx$$

(i) *Probar que ϕ es simétrica.*

Hay que comprobar que para dos polinomios cualesquiera $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se cumple que:

$$\phi(p(x), q(x)) = \phi(q(x), p(x)).$$

Pero:

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx = \int_0^1 q'(x)p(x)dx + \int_0^1 q(x)p'(x)dx =$$
$$= \int_0^1 q(x)p'(x)dx + \int_0^1 q'(x)p(x)dx = \phi(q(x), p(x)$$

(ii) *Hallar la matriz asociada a ϕ respecto de la base canónica.*

La base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es $C = \{1, x, x^2\}$. La matriz asociada en tal base es:

$$F_C = \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,x) & \phi(1,x^2) \\ \phi(x,1) & \phi(x,x) & \phi(x,x^2) \\ \phi(x^2,1) & \phi(x^2,x) & \phi(x^2,x^2) \end{pmatrix}.$$

Para hacer las "cuentas" de manera más rápida podemos hacer dos observaciones:

- Por ser ϕ simétrica:

$$\phi(x,1) = \phi(1,x), \quad \phi(x^2,1) = \phi(1,x^2), \quad \phi(x^2,x) = \phi(x,x^2).$$

- Por las propiedades del cálculo diferencial e integral:

$$\int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx = \int_0^1 (p(x)q(x))'dx = p(1)q(1) - p(0)q(0).$$

Entonces:

$$\phi(1,1) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$
$$\phi(1,x) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1.$$
$$\phi(1,x^2) = 1 \cdot 1^2 - 1 \cdot 0^2 = 1.$$
$$\phi(x,x) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$
$$\phi(x,x^2) = 1 \cdot 1^2 - 0 \cdot 0^2 = 1.$$
$$\phi(x^2,x^2) = 1^2 \cdot 1^2 - 0^2 \cdot 0^2 = 1.$$

y así:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Calcular el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a ϕ.*

Para calcular el rango y signatura diagonalizamos la matriz asociada por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{13}}{\longrightarrow} \overset{\nu_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $rango(\phi) = 2$ y $sign(\phi) = (1, 1)$.

(iv) *Encontrar una base de polinomios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respecto de la cual la matriz asociada a ϕ sea diagonal.*

Basta realizar sobre la matriz identidad la mismas operaciones fila que hemos hecho para diagonalziar la matriz asociada; las filas de la matriz que obtengamos son las coordenadas de los vectores de la base buscada respecto de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La base buscada está formada por tanto por los polinomios:

$$\{0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2, 0 \cdot 1 + 1 \cdot x - 1 \cdot x^2, 1 \cdot 1 + 0 \cdot x - 1 \cdot x^2\} = \{x^2, x - x^2, 1 - x^2\}.$$

(v) ¿Es ϕ un producto escalar?.

No, porque hemos visto en (*iii*) que no es definida positiva porque la signatura NO es $(3, 0)$.

Notación: $p'(x), q'(x)$ denotan respectivamente las derivadas de $p(x), q(x)$.

(1.3 puntos)

2.– *Sean $w_1, w_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos forma cuadráticas semidefinidas positivas. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *$w_1 + w_2$ es semidefinida positiva.*

FALSO. Como contraejemplo basta tomar dos formas cuadrátricas en $\mathbb{R}^2$ con matrices asociadas respecto de la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ambas tienen signatura $(1, 0)$ y por tanto son semidefinidas positivas; sin embargo su suma es la identidad, que es definida positiva.

(ii) *$-w_1 - w_2$ no es indefinida.*

VERDADERO. Por ser w_1, w_2 semedefinidas positivas, se tiene:

$$w_1(u), w_2(u) \geq 0, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces:

$$-w_1(u) - w_2(u) \leq 0, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

y por tanto $-w_1 - w_2$ siempre es definida negativa o semidefinida negativa.

(iii) *$w_1 + w_2$ es definida positiva.*

FALSO. Como contraejemplo basta tomar dos formas cuadrátricas en $\mathbb{R}^2$ con matrices asociadas respecto de la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ambas y su suma tienen signatura $(1, 0)$ y por tanto todas son semidefinidas positivas.

(0.6 puntos)

3.– Sea la matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) *Probar que G es la matriz de Gram un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica.*

Basta probar que la matriz es simétrica y definida positiva.

- Es simétrica porque $G = G^t$.

- Para ver que es definida positiva usamos el criterio de Sylvester:

$$|\,1\,| = 1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

(ii) *En el espacio afín euclídeo con el producto escalar anterior calcular la distancia entre las rectas:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Un punto genérico de la recta r es de la forma $P = (1, 0, a)$; de la recta s es de la forma $Q = (b, 1, 0)$. Se tiene que:

$$dist(r, s) = \|PQ\| \text{ si } \vec{P}Q \text{ es perpendicular a } r \text{ y } s$$

Entonces el vector PQ tiene que ser perpendicular a los vectores directores de r y s:

$$\left.\begin{array}{r} (b-1, 1, -a) \cdot (0, 0, 1) = 0 \\ (b-1, 1, -a) \cdot (1, 0, 0) = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} (b-1, 1, -a)G(0, 0, 1)^t = 0 \\ (b-1, 1, -a)G(1, 0, 0)^t = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} 2b - 2 - 5a = 0 = 0 \\ b - 1 - 2a = 0 \end{array}\right\}.$$

Deducimos que $a = 0$, $b = 1$ y:

$$dist(r, s) = \|PQ\| = \|(0, 1, 0)\| = \sqrt{(0, 1, 0)G(0, 1, 0)^t} = \sqrt{2}.$$

(1 punto)

4.– *Hallar la ecuación de una cónica que tiene por asíntota la recta $x = 2$, un vértice en el punto $(1, -1)$ y la recta tangente en ese vértice es $x + y = 0$.*

Método I:

Conocemos una asíntota y una recta tangente en un punto dado. Podemos usar el haz de cónicas en esas condiciones. Las dos cónicas que lo generan son:

- La cónica formada por la asíntota y la tangente:

$$(x - 2)(x + y)$$

- La cónica formada por la recta doble paralela a la asíntota pasando por el punto de tangencia:

Una paralela a la asíntota es de la forma:

$$x + k = 0.$$

Imponemos que pase por el punto $(1, -1)$:

$$1 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -1.$$

Por tanto la segunda cónica del haz es:

$$(x-1)^2$$

El haz nos queda:

$$(x-2)(x+y)+\lambda(x-1)^2=0 \iff (1+\lambda)x^2+xy-2(1+\lambda)x-2y+\lambda=0.$$

Finalmente tenemos en cuenta que uno de los ejes de la hipérbola es paralelo a la tangente en el vértice; el eje es la recta polar de su vector normal. Tal vector normal es el $(1,1)$. Su recta polar:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\lambda & 1/2 & 1+\lambda \\ 1/2 & 0 & -1 \\ 1+\lambda & -1 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y \\ 1\end{pmatrix}=(\lambda+1/2)x-y/2+(2+\lambda)=0$$

Ha de ser paralelo al $x+y=0$, y por tanto:

$$\frac{\lambda+1/2}{1}=\frac{-1/2}{1}\Rightarrow \lambda=-1.$$

La cónica buscada queda:

$$xy-2y-1=0.$$

Método II:

El eje es perpendicular a la tangente en el vértice. Por tanto es de la forma:

$$x-y+k=0$$

y por pasar por $(1,-1)$:

$$1-(-1)+k=0 \qquad \Rightarrow \qquad k=-2.$$

El eje tiene por ecuación $x-y-2=0$.

Ahora el eje es un punto de simetría de la cónica; la otra asíntota es la simétrica de la dada respecto a tal eje. Para hallarla tenemos en cuenta:

- Pasa por la intersección del eje y de la asíntota dada:

$$\left.\begin{array}{r} x-2=0 \\ x-y-2=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad (x,y)=(2,0).$$

- Dado $P=(2,1)$ en la asíntota su simétrico $P'=(a,b)$ cumple:

$$\frac{P+P'}{2}\in eje, \qquad \vec{PP'}\perp eje.$$

Obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{2+a}{2}-\frac{1+b}{2}-2=0, \qquad a-2+b-1=0.$$

Resolviendo el sistema queda $a=3$, $b=0$.

La asíntota buscada es la recta que une los puntos $(2,0)$ y $(3,0)$, es decir, la recta $y=0$.

El haz de cónicas conocidas dos asíntotas es:

$$y(x-2)+\lambda=0.$$

Y finalmente imponemos que pase por el vértice $(1,-1)$:

$$-1(1-2)+\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1.$$

La ćonica pedida queda:

$$xy-2y-1=0.$$

(1.5 puntos)

5.– *Supongamos que escogemos* 2011 *puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?*

Una simetría respecto a $P = (a, b, c)$ tiene por ecuación:

$$f(X) = f(x, y, z) = (a, b, c) - (x - a, y - b, z - c) = (2a, 2b, 2c) - (x, y, z) = 2P - X.$$

Por tanto la matriz asociada a la parte lineal de la trasnformación afín es $-Id$. Entonces la matriz asociada a la parte lineal de la transformación afín que se obtiene componiendo 2011 simetrías respecto a un punto es $(-Id)^{2011} = -Id$. Deducimos que la composición es de nuevo una simetría respecto a un punto.

Observación: Si los puntos que escogemos son $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2011}$ al ir componiendo obtenemos:

$$\begin{aligned}
&f_1(X) = 2P_1 - X\\
&f_2(f_1(X)) = 2P_2 - (2P_1 - X) = 2(P_2 - P_1) + X\\
&f_3(f_2(f_1(X)) = 2P_3 - 2(P_2 - P_1) - X = 2(P_3 - P_2 + P_1) - X
\end{aligned}$$

Nos fijamos entonces que la simetría que obtenemos al componer todas las transformaciones es respecto al punto de coordenadas:

$$P_{2011} - P_{2010} + P_{2009} - \ldots + P_3 - P_2 + P_1.$$

(0.6 puntos)