Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio 1 (1 hora y 40 min.) **27 de mayo de 2011**

1.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales. Consideramos la forma bilineal:

$$\phi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx$$

(i) Probar que ϕ es simétrica.

(ii) Hallar la matriz asociada a ϕ respecto de la base canónica.

(iii) Calcular el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a ϕ.

(iv) Encontrar una base de polinomios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respecto de la cual la matriz asociada a ϕ sea diagonal.

(v) ¿Es ϕ un producto escalar?.

Notación: $p'(x), q'(x)$ denotan respectivamente las derivadas de $p(x), q(x)$.

(1.3 puntos)

2.– Sean $w_1, w_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos forma cuadráticas semidefinidas positivas. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) $w_1 + w_2$ es semidefinida positiva.

(ii) $-w_1 - w_2$ no es indefinida.

(iii) $w_1 + w_2$ es definida positiva.

(0.6 puntos)

3.– Sea la matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Probar que G es la matriz de Gram un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica.

(ii) En el espacio afín euclídeo con el producto escalar anterior calcular la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

(1 punto)

4.– Hallar la ecuación de una cónica que tiene por asíntota la recta $x = 2$, un vértice en el punto $(1, -1)$ y la recta tangente en ese vértice es $x + y = 0$.

(1.5 puntos)

5.– Supongamos que escogemos 2011 puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II **Exame Final**

Exercicio 1 (1 hora e 40 min.) **27 de maio de 2011**

1.– Sexa $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de polinomios de grao menor ou igual que dous con coeficientes reais. Consideramos a forma bilineal:

$$\phi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx$$

(i) Probar que ϕ é simétrica.

(ii) Atopar a matriz asociada a ϕ respecto da base canónica.

(iii) Calcular o rango e a signatura da forma cuadrática asociada a ϕ.

(iv) Atopar unha base de polinomios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respecto da cal a matriz asociada a ϕ sexa diagonal.

(v) É ϕ un produto escalar?.

Notación: $p'(x), q'(x)$ denotan respectivamente as derivadas de $p(x), q(x)$.

(1.3 puntos)

2.– Sexan $w_1, w_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dúas forma cuadráticas semidefinidas positivas. Razoar a falsedade ou veracidade das seguintes afirmacións:

(i) $w_1 + w_2$ é semidefinida positiva.

(ii) $-w_1 - w_2$ non é indefinida.

(iii) $w_1 + w_2$ é definida positiva.

(0.6 puntos)

3.– Sexa a matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Probar que G é a matriz de Gram dun produto escalar en $\mathbb{R}^3$ respecto da base canónica.

(ii) No espazo afín euclídeo co produto escalar anterior calcular a distancia entre as rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

(1 punto)

4.– Atopar a ecuación dunha cónica que ten por asíntota a recta $x = 2$, un vértice no punto $(1, -1)$ e a recta tanxente nese vértice é $x + y = 0$.

(1.5 puntos)

5.– Supongamos que escollemos 2011 puntos distintos do espazo e componemos todas as simetrías respecto de tales puntos. Qué tipo de transformación afín obteremos?

(0.6 puntos)