Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio 2 (1 hora y 30 min.) **14 de julio de 2011**

1.– *Hallar la ecuación de una elipse sabiendo que tiene uno de sus focos en el punto* $(-4, 2)$*, el vértice más alejado del mismo es el punto* $(2, -1)$ *y la excentricidad vale* $1/2$*.*

Si denotamos por a, b, c respectivamente a las longitudes del semieje mayor, menor y distancia del foco al centro, de los datos dados deducimos que:

$$a + c = d(F, V), \qquad \frac{c}{a} = e = \frac{1}{2},$$

siendo $F = (-4, 2)$ y $V = (2, -1)$. Operando obtenemos:

$$d(F, V) = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-(-1))^2} = 3\sqrt{5}$$

y de ahí $a = 2\sqrt{5}$ y $c = \sqrt{5}$.

El otro foco F' está a distancia $2c$ sobre la recta que une F y V en la dirección $\vec{FV}$, es decir,

$$F' = F + \frac{\vec{FV}}{\|FV\|} \cdot 2c.$$

Operando tenemos:

$$\vec{FV} = (2, -1) - (-4, 2) = (6, -3) \text{ y } \|\vec{FV}\| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5}.$$

de donde:

$$F' = (-4, 2) + \frac{(6, -3)}{3\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = (0, 0).$$

Finalmente para obtener la ecuación de la elipse usamos su caracterización como lugar geométrico de puntos cuya suma de distancias a los focos es constante. Tal constante sabemos además que es $2a$. La ecuación será entonces:

$$\sqrt{(x-(-4))^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 4\sqrt{5}.$$

Simplificando queda:

$$16x^2 + 19y^2 + 4xy + 60x - 30y - 225 = 0.$$

(1.2 puntos)

2.– *Sea la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

(i) *Clasificar la cónica y hallar su ecuación reducida.*

La matriz asociada a la cónica A y de términos cuadráticos T son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $det(A) = -9 < 0$ y $det(T) = -3 < 0$ y por tanto la cónica es una hipérbola.

Su ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c = 0, \qquad c = \frac{det(A)}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{det(A)}{det(T)},$$

siendo λ_1, λ_2 los autovalores de T. Los calcuamos como raíces del polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1-\lambda)^2 - (-2)^2 = 0 \iff (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0.$$

Obtenemos $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$; la ecuación reducida queda:

$$3x'^2 - y'^2 + 3 = 0.$$

(ii) *Hallar los ejes y las asíntotas (si existen).*

Los ejes son las rectas polares de los autovectores asociados a autovalores de T no nulos. Calculemos tales autovectores.

Asociados a $\lambda_1 = 3$:

$$(T - 3Id)(x,y)^t = (0,0)^t \iff -2x - 2y = 0 \iff (x,y) \in \mathcal{L}\{(1,-1)\}.$$

Asociados a $\lambda_2 = -1$:

$$(T + Id)(x,y)^t = (0,0)^t \iff 2x - 2y = 0 \iff (x,y) \in \mathcal{L}\{(1,1)\}.$$

Los ejes serán:

$$(1,-1,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y = 0.$$

$$(1,1,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y + 2 = 0.$$

Las asíntotas son las rectas polares de las direcciones asintóticas. Estas corresponden a los puntos del infinito de la cónica:

$$(p,q,0)A(p,q,0)^t = 0 \iff p^2 - 4pq + q^2 = 0.$$

Resolviendo queda:

$$(p,q) \in \mathcal{L}\{(2-\sqrt{3},1)\} \text{ ó } (p,q) \in \mathcal{L}\{(2+\sqrt{3},1)\}.$$

Las asíntotas serán:

$$(2-\sqrt{3},1,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -\sqrt{3}x + (-3+2\sqrt{3})y - 3 + \sqrt{3} = 0 \iff x + (2-\sqrt{3})y + \sqrt{3} - 1 = 0.$$

$$(2+\sqrt{3},1,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \sqrt{3}x + (-3-2\sqrt{3})y - 3 - \sqrt{3} = 0 \iff x - (2+\sqrt{3})y - \sqrt{3} - 1 = 0.$$

(iii) *Calcular la excentricidad de la cónica.*

La excentricidad de una hipérbola es:

$$e = \frac{c}{a}$$

siendo $c = \sqrt{a^2+b^2}$, a la distancia del vértice al centro. Para hallar tales valores reescribimos la ecuación reducida de la hipérbola como:

$$3x'^2 - y'^2 + 3 = 0 \iff \frac{y'^2}{3} - \frac{x'^2}{1} = 1,$$

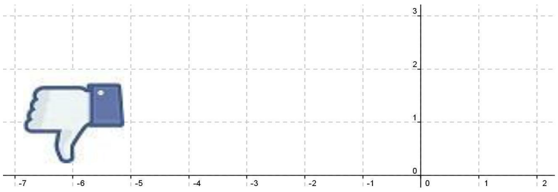
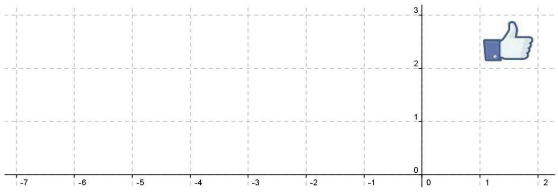
de manera que $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{1}$ y $c = \sqrt{a^2+b^2} = 2$.

La excentricidad resulta:

$$e = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(1.8 puntos)

3.– *Dar la ecuación de una homotecia que transforme una figura en otra:*

Si observamos la figura inicial y la final, vemos que están inscritas en un cuadrado de lado 2 y lado 1 respectivamente. Además una se encuentra girada 180 grados respecto a la otra. Deducimos que se tratará de una homotecia de razón $r = -1/2$. El centro de la homotecia puede obtenerse como la intersección de un par de rectas que unan un punto con su transformado.

El punto $(-5, 2)$ se transforma en $(1, 2)$ y la recta que los une es $y = 2$.

El punto $(-5, 0)$ se transforma en $(1, 3)$ y la recta que los une es $\dfrac{x-1}{-5-1} = \dfrac{y-3}{0-3}$; simplificando $x - 2y + 5 = 0$.

Intersecando ambas rectas obtenemos que el centro de la homotecia es $(-1, 2)$.

La ecuación de la homotecia queda por tanto:

$$t(x, y) = (-1, 2) - \frac{1}{2}((x, y) - (-1, 2)) = (-\frac{3}{2}, 3) - \frac{1}{2}(x, y).$$

(1 punto)

4.– *Calcular la matriz de Gram de un producto escalar que dote a* $\mathbb{R}^2$ *de una estructura de espacio afín euclideo en el cual el cuadrilátero de vértices* $A(0, 0), B(1, 0), C(2, 1), D(1, 1)$ *sea un cuadrado de área* 4.

La matriz de Gram respecto a la base canónica es una matriz simétrica:

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Por ser un cuadrado los lados tiene que ser perpendicualres:

$$AB \cdot AD = 0 \iff (1, 0) \cdot (1, 1) = 0 \iff (1, 0)G(1, 1)^t = 0 \iff a + b = 0.$$

Por tener área 4 el cuadrado de la longitud de sus lados debe de ser 4:

$$4 = \|AB\|^2 = AB \cdot AB = (1, 0)G(1, 0)^t = a$$
$$4 = \|AD\|^2 = AD \cdot AD = (1, 1)G(1, 1)^t = a + 2b + c$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones resulta:

$$a = 4, \quad b = -4, \quad c = 8.$$

La matriz pedida es:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Observación: La matriz de Gram de un producto escalar debe de ser definida positiva. Nuestra matriz cumple esta condición. Para comprobarlo basta verificar el criterio de Sylvester:

$$det(4) = 4 > 0, \quad det(G) = 4 \cdot 8 - (-4)^2 = 16 > 0.$$

(1 punto)
