Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio 1 (1 hora y 40 min.) **14 de julio de 2011**

1.– *Para cada número $a \in \mathbb{R}$, definimos la forma cuadrática $w_a : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$w_a(x,y,z,t) = ax^2 + (1-a)y^2 + az^2 + 2(1-a)xz + 2xt + 2zt + t^2.$$

(i) *Clasificar la forma cuadrátrica en función de a, indicando además su rango y signatura.*

La matriz asociada a la forma cuadrática respecto de la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para clasificarla, teniendo en cuenta que las formas cuadráticas cambian de base por congruencia, la diagonalizamos haciendo exactamente las mismas operaciones elementales fila y columna:

$$F_C \xrightarrow{H_{14}} \xrightarrow{\nu_{14}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1-a \\ 1 & 0 & 1-a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\nu_{31}(-1)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \xrightarrow{\nu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & -a \\ 0 & 0 & -a & a-1 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 1$ continuamos:

$$\xrightarrow{H_{43}(a/(a-1))} \xrightarrow{\nu_{43}(a/(a-1))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1-\dfrac{a^2}{a-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dfrac{1-2a}{a-1} \end{pmatrix}$$

Si $a = 1$,

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{34}(1/2)} \xrightarrow{\nu_{34}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{43}(-1)} \xrightarrow{\nu_{43}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $a \neq 1$, los puntos críticos donde se anulan los términos de la diagonal y por tanto son puntos intermedios de cambio de signo son $a = 1$ y $a = 1/2$. Teniendo esto distinguimos los siguientes casos:

Parámetro	Signatura	Rango	Tipo	Degenerada
$a \in (-\infty, 1/2)$	$(2,2)$	4	indefinida	no
$a = 1/2$	$(2,1)$	3	indefinida	si
$a \in (1/2, 1)$	$(3,1)$	4	indefinida	no
$a = 1$	$(2,1)$	3	indefinida	si
$a \in (1, \infty)$	$(2,2)$	4	indefinida	no

(ii) *Para $a = 1$ dar una base de vectores conjugados respecto de la forma cuadrátrica.*

Una base es de vectores conjugados si la matriz asociada a la forma cuadrátrica respecto a ella es diagonal. En nuestro caso ya hemos diagonalizado en el apartado anterior la matriz de la forma cuadrática. Las coordenadas de los vectores de la base en la cual la matriz diagonaliza se obtienen como filas de la matriz que resulta de hacer las mismas operaciones fila que hemos hecho anteriormente sobre la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{14}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{34}(1/2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{43}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Por tanto una base de vectores conjugados es:

$$B = \{(0,0,0,1),(0,1,0,0),(\frac{1}{2},0,1,-\frac{3}{2}),(\frac{1}{2},0,-1,\frac{1}{2})\}.$$

(iii) *Para $a = 0$ sea f la forma bilineal simétrica asociada a w_0. Calcular $f((1,4,0,7),(2,0,1,1))$.*

La forma bilineal simétrica asociada a una forma cuadrátrica tiene su misma matriz asociada. Por tanto:

$$f(u,v) = (u)_C^t F_C (v)_C.$$

En nuestro caso:

$$f((1,4,0,7),(2,0,1,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 30.$$

(1.2 puntos)

2.– *En el espacio afín E_3 con el producto escalar usual, consideramos las rectas de ecuaciones:*

$$r \equiv \begin{cases} 0 = z - 1 \\ 0 = y \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y + z - 2 \end{cases}$$

(i) *Hallar la ecuación de una recta que pase por $P(1,1,-1)$ y corte a r y s.*

La recta pedida está en los planos que contienen a r y a P y a s y a P. Por tanto será la intersección de tales planos.

Para hallar el plano que contiene a r y contiene a P usamos el haz de planos generado por las dos ecuaciones que nos definen r:

$$z - 1 + ay = 0.$$

Imponemos que pase por el punto $P = (1,1,-1)$:

$$-1 - 1 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2,$$

y obtenemos el plano:

$$2y + z - 1 = 0.$$

Igualmente, para hallar el plano que contiene a s y contiene a P usamos el haz de planos generado por las dos ecuaciones que nos definen r:

$$bx + y + z - 2 = 0.$$

Imponemos que pase por el punto $P = (1, 1, -1)$:

$$b + 1 - 1 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 2,$$

y obtenemos el plano:

$$2x + y + z - 2 = 0.$$

Las ecuaciones implícitas de la recta pedida son por tanto:

$$\begin{cases} \phantom{2x+{}} 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(ii) *Hallar la ecuación de un plano paralelo a r y s y que equidiste de ambas.*

Dado que el plano buscado es paralelo a ambas rectas, su vector normal será perpendicular a los vectores directores de las rectas dadas. Por tanto podemos tomar domo vector normal del plano el producto vectorial de los vectores directores de r y s.

Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 1$$

y por tanto su vector director $v_r = (1, 0, 0)$.

Las ecuaciones paramétricas de s son:

$$x = 0, \quad y = b, \quad z = -b + 2.$$

y por tanto su vector director $v_r = (0, 1, -1)$.

El vector normal del plano buscado será:

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = e_2 + e_3 = (0, 1, 1)$$

El plano π pedido es de la forma $y + z + c = 0$.

Para hallar c utilizaremos la condición de la equidistancia. La distancia de un plano a una recta paralela, es la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Tomamos los puntos $(0, 0, 1) \in r$ y $(0, 0, 2) \in s$:

$$d(r, \pi) = d(s, \pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{|0 + 1 + c|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 2 + c|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}}$$

Si quitamos los valores absolutos hay dos posiblidades:

- O bien $1 + c = 2 + c$, pero entonces $1 = 2$ y esto es imposible.

- O bien $-1 - c = 2 + c$ y entonces $c = -3/2$.

Deducimos que el plano π tiene por ecuación implícita:

$$y + z - \frac{3}{2} = 0.$$

(1.5 puntos)

3.– *En el espacio afín E_3 con el producto escalar usual, dar las ecuaciones de una simetría respecto al plano $x+y-2=0$. Hallar además la imagen del plano $x+y-2z=1$ por la simetría anterior.*

Las ecuaciones de la simetría son de la forma:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

siendo $P=(a,b,c)$ un punto del plano de simetría y T_C la matriz de la simetría respecto al subespacio U de dimensión 2 asociado al pano de simetría.

Las ecuaciones vectoriales de π son:

$$(x,y,z)=(2,0,0)+a(0,0,1)+b(1,-1,0).$$

Tomamos entonces $P=(2,0,0)$ y $U=\mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-1,0)\}$.

Para hallar T_C completamos la base de U con un vector perpendicualar al plano. Podemos tomar el vector normal del mismo $(1,1,0)$.

$$B=\{(0,0,1),(1,-1,0),(1,1,0)\}.$$

La matriz de la simetría respecto a tal base es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base canónica:

$$T_C = M_{CB}T_BM_{BC} = M_{CB}T_BM_{CB}^{-1}, \qquad M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$T_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de la simetría son:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ 2-y \\ z \end{pmatrix}.$$

Para trasnformar el plano $x+y-2z=1$ mediante la simetría transformamos un punto del mismo mediante las ecuaciones anteriores y el vector normal del plano mediante la matriz de la trasnformación ortogonal asociada. Como punto del plano tomamos $(1,0,0)$ y su imagen será:

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La imagen del vector normal:

$$T_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto el simétrico del plano inicial es el que tiene por vector normal $(1,1,2)$ y pasa por $(1,2,0)$:

$$x+y+2z+d=0.$$

Imponemos que pase por $(1,2,0)$:

$$1+2+0+d=0 \qquad \Rightarrow \qquad d=-3.$$

Resulta:

$$x+y+2z-3=0.$$

(1.2 puntos)

4.– *Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal $\mathbb{R}^2$ respecto a una base arbitaria. Razonar la veracidad o la falsedad de las siguientes cuestiones:*

Observamos primeramente que la traza y determinante de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base en la que estemos trabajando. Eso es consecuencia de que la semejanza conserva traza y determinante. Por otra parte sabemos que una transformación ortogonal en el plano es:

- O bien una simetría respecto a una recta, y entonces en una cierta base $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $det(T) = -1$ y $traza(T) = 0$;

- o bien un giro y entonces en una base ortonormal $T_B = \begin{pmatrix} cos(A) & -sin(A) \\ sin(A) & cos(A) \end{pmatrix}$ y por tanto $det(T) = 1$ y $traza(T) = 2cos(A)$.

(i) $|traza(T)| \leq 2$.

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, bien $traza(T) = 0$ ó $|traza(T)| = |2cos(A)| \leq 2 \cdot 1$.

(ii) *Si $traza(T) = 2$ entonces $T = Id$.*

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, si $traza(T) = 2$ necesariamente es un giro de ángulo A verificando $2cos(A) = 2$. Pero entonces el ángulo A es cero y un giro de cero grados es precisamente la transformación identidad.

(iii) *Si $det(T) = -1$ entonces $traza(T) = 0$.*

VERDADERO. Si $det(T) = -1$ hemos visto que se trata de una simetría y por tanto $traza(T) = 0$.

(iv) *Si $traza(T) = 0$ entonces $det(T) = -1$.*

FALSO. Por ejemplo si es un giro de ángulo $A = \pi/2$ tenemos $traza(T) = 2cos(\pi/2) = 0$, pero $det(T) = 1$.

(1.1 puntos)