**Álgebra Lineal II** **Examen Final**

**Ejercicio 1** (1 hora y 40 min.) **14 de julio de 2011**

---

**1.–** Para cada número $a \in \mathbb{R}$, definimos la forma cuadrática $w_a : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$w_a(x, y, z, t) = ax^2 + (1 - a)y^2 + az^2 + 2(1 - a)xz + 2xt + 2zt + t^2.$$

(i) Clasificar la forma cuadrátrica en función de $a$, indicando además su rango y signatura.

(ii) Para $a = 1$ dar una base de vectores conjugados respecto de la forma cuadrátrica.

(iii) Para $a = 0$ sea $f$ la forma bilineal simétrica asociada a $w_0$. Calcular $f((1, 4, 0, 7), (2, 0, 1, 1))$.

(1.2 puntos)

---

**2.–** En el espacio afín $E_3$ con el producto escalar usual, consideramos las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 0 = z - 1 \\ 0 = y \end{cases} , \quad s \equiv \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y + z - 2 \end{cases}$$

(i) Hallar la ecuación de una recta que pase por $P(1, 1, -1)$ y corte a $r$ y $s$.

(ii) Hallar la ecuación de un plano paralelo a $r$ y $s$ y que equidiste de ambas.

(1.5 puntos)

---

**3.–** En el espacio afín $E_3$ con el producto escalar usual, dar las ecuaciones de una simetría respecto al plano $x + y - 2 = 0$. Hallar además la imagen del plano $x + y - 2z = 1$ por la simetría anterior.

(1.2 puntos)

---

**4.–** Sea $T$ la matriz asociada a una transformación ortogonal $\mathbb{R}^2$ respecto a una base arbitaria. Razonar la veracidad o la falsedad de las siguientes cuestiones:

(i) $|traza(T)| \leq 2$.

(ii) Si $traza(T) = 2$ entonces $T = Id$.

(iii) Si $det(T) = -1$ entonces $traza(T) = 0$.

(iv) Si $traza(T) = 0$ entonces $det(T) = -1$.

(1.1 puntos)

---

**Álxebra Lineal II** — **Exame Final**

**Exercicio 1** (1 hora e 40 min.) **14 de xullo de 2011**

---

**1.–** Para cada número $a \in \mathbb{R}$, definimos a forma cuadrática $w_a : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$w_a(x, y, z, t) = ax^2 + (1-a)y^2 + az^2 + 2(1-a)xz + 2xt + 2zt + t^2.$$

(i) Clasificar a forma cuadrátrica en función de $a$, indicando ademais o seu rango e signatura.

(ii) Para $a = 1$ dar unha base de vectores conxugados respecto da forma cuadrátrica.

(iii) Para $a = 0$ sexa $f$ a forma bilineal simétrica asociada a $w_0$. Calcular $f((1,4,0,7),(2,0,1,1))$.

(1.2 puntos)

---

**2.–** No espazo afín $E_3$ co producto escalar usual, consideramos as rectas de ecuacións:

$$r \equiv \begin{cases} 0 = z - 1 \\ 0 = y \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y + z - 2 \end{cases}$$

(i) Atopar a ecuación dunha recta que pase por $P(1,1,-1)$ e corte a $r$ e $s$.

(ii) Atopar a ecuación dun plano paralelo a $r$ e $s$ e que equidiste de ambas.

(1.5 puntos)

---

**3.–** No espazo afín $E_3$ co producto escalar usual, dar as ecuacións dunha simetría respecto ó plano $x + y - 2 = 0$. Atopar ademais a imaxe do plano $x + y - 2z = 1$ pola simetría anterior.

(1.2 puntos)

---

**4.–** Sexa $T$ a matriz asociada a unha transformación ortogonal $\mathbb{R}^2$ respecto a unha base arbitaria. Razoar a veracidade ou a falsedade das siguientes cuestións:

(i) $|traza(T)| \leq 2$.

(ii) Se $traza(T) = 2$ entón $T = Id$.

(iii) Se $det(T) = -1$ entón $traza(T) = 0$.

(iv) Se $traza(T) = 0$ entón $det(T) = -1$.

(1.1 puntos)

---