Vectores autoconjugados.

Corolario 0.1 (Descripción de vectores autoconjugados.) *Sea $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática en un espacio vectorial U n-dimensional. Sea $Aut(\omega)$ el conjunto de vectores autconjugados. Entonces:*

1. *Si ω es definida positiva o definida negativa entonces $Aut(\omega) = \{\vec{0}\}$.*
2. *Si ω es semidefinida positiva o semidefinida negativa entonces $Aut(\omega) = ker(\omega)$.*
3. *Si ω es indefinida, entonces:*
   - *(a) Si $rango(\omega) = 2$ entonces $Aut(\omega)$ se descompone como producto de dos hiperplanos que se intersecan en $ker(w)$.*
   - *(b) Si $rango(\omega) > 2$ entonces $Aut(\omega)$ es una cuádrica que no puede descomponerse como producto de hiperplanos.*

Prueba: Recordemos que:

$$Aut(\omega) = \{\vec{u} \in U | \omega(\vec{u}) = 0\}.$$

Si la forma cuadrática es definida positiva (o negativa) entonces $\omega(\vec{u}) \neq 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$. Por tanto $Aut(\omega) = \{\vec{0}\}$.

Si la forma cuadrática es semidefinida positiva entonces en una determinada base B sabemos que la matriz asociada F_B es una matriz diagonal con $k = n - rango(w)$ unos en la diagonal y $rango(w)$ ceros. En tal base:

$$w((x_1, x_2, \ldots, x_n)_B) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2$$

siendo $n - k = rango(w)$.

Entonces:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_B \in Aut(\omega) \iff x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0.$$

Por otra parte un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$ pertence al núcleo si cumple:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_B F_B = (0, 0, \ldots, 0) \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$$

Vemos que efectivamente $Aut(\omega) = ker(\omega)$. De manera análoga se estudia el caso en el que la forma cuadrática es semidefinida negativa.

Finalmente si es indefinida, en la forma diagonalizada aparecen términos positivos y negativos en la diagonal:

- Si $rango(\omega) = 2$ entonces en una determinada base,

$$w((x_1, x_2, \ldots, x_n)_B) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Por tanto,

$$w((x_1, x_2, \ldots, x_n)_B) = 0 \iff x_1 - x_2 = 0 \text{ ó } x_1 + x_2 = 0$$

y vemos que efectivamente el conjunto de vectores autoconjugados es la unión de dos hiperplanos, uno determinado por la ecuación $x_1 - x_2 = 0$ y el otro por $x_1 + x_2 = 0$. Ademas el núcleo está formado por los vectores que cumple $x_1 = x_2 = 0$ que corresponde justo a la intersección de ambos hiperplanos.

- Si $rango(\omega) > 2$ entonces en una base B,

$$w((x_1, x_2, \ldots, x_n)_B) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$$

con $p, q > 1$ y $p + q > 2$ y no hay forma de descomponer ni simplificar la ecuación:

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 + x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 = 0.$$

■

Observación 0.2 *Pueden verse ejemplos en los problemes del boletín: (3)b, (4)iv, (6)ii, (7)iii, (11)iv.*