MATRICES. GENERALIDADES Y RANGO.

Definición de matriz $m \times m$

- Una **matriz** es un conjunto de $m \times n$ elementos dispuestos en m **filas** y n **columnas**.
- Suelen denotarse con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{12} = elemento en fila 1 columna 2.

Rango de una matriz

- El rango es el máximo número de filas (o columnas) linealmente independientes de la matriz.
- El rango es el máximo tamaño de todas las submatrices cuadradas con determinante no nulo.

Cálculo por el método de orlado:

- Se busca una submatriz 1×1 con $det \neq 0$. Si no existe, hemos terminado y $rango = 0$. Si existe $rango \geq 1$ y continuamos.
- Se busca una submatriz 2×2 con $det \neq 0$, **añadiendo una fila y columna a la del paso anterior**. Si no existe, hemos terminado y $rango = 1$. Si existe $rango \geq 2$ y continuamos.
- Se busca una submatriz 3×3 con $det \neq 0$, **añadiendo una fila y columna a la del paso anterior**. Si no existe, hemos terminado y $rango = 2$. Si existe $rango \geq 3$ y continuamos.
- Así sucesivamente. Se termina cuando NO hemos encontrado submatriz con $det \neq 0$ ó agotamos filas ó columnas.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad |1| = 1 \neq 0, \quad \checkmark$

, (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad$ ✗, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \quad \checkmark$

(*iii*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad$ ✗, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad$ ✗ $\quad \boxed{rango(A) = 2}$

Cálculo por Gauss:

Escalonar: $\begin{cases} \text{Intercambiar filas} \\ \text{Multiplicar/dividir fila por un número (para conseguir unos)} \\ \text{Sumar a una fila un múltiplo de otra (hacer ceros)} \end{cases}$

$\boxed{Rango = \textbf{Número de filas no nulas} \text{ de la forma escalonada.}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boxed{rango(A) = 2}$$

Matrices especiales

- **Matriz cuadrada:** Matriz con el mismo número de filas y columnas.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \quad \text{cuadrada} \qquad\qquad \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix} \quad \text{NO cuadrada}$$

- **Matriz fila:** Matriz con una sola fila.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

- **Matriz columna:** Matriz con una sola columna.

$$\begin{pmatrix}7\\ 9\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal:** Matriz con ceros fuera de la diagonal.

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular superior (inferior):** Matriz con ceros debajo (encima) de la diagonal.

$$\underset{\text{Triangular superior}}{\begin{pmatrix}9 & 1 & 7\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}} \qquad\qquad \underset{\text{Triangular inferior}}{\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 9 & 7 & 1\end{pmatrix}}$$

- **Matriz identidad I:** Matriz cuadrada con unos en la diagonal y cero en el resto.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica:** Matriz cuadrada que coincide con su traspuesta.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 3 & 5\\ 6 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de matrices $A+B$

Se suman matrices del mismo tamaño sumando elementos en la misma posición.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+3 & 1+0 \\ 3+(-1) & 4+2 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Conmutativa: $A+B=B+A$.
- Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$.
- Elemento neutro: Matriz nula 0: $0+A=A+0=A$.
- Elemento opuesto: $-A$, $A+(-A)=(-A)+A=0$.

Producto de un número por una matriz $k\cdot A$

Se multiplican todos los elementos de la matriz por el número.

$$3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$.
- $(k+t)\cdot A=k\cdot A+t\cdot A$.
- $(k\cdot t)\cdot A=k\cdot(t\cdot A)$.
- $1\cdot A=A$.

Producto de dos matrices $A\cdot B$

El número de columnas de la primera matriz debe de coincidir con el número de filas de la segunda.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 3} = \begin{array}{ccc} \text{1ª fila} \times \text{1ª columna} & \text{1ª fila} \times \text{2ª columna} & \text{1ª fila} \times \text{3ª columna} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 0+(-1)\cdot 2+1\cdot 3 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 1+1\cdot 1 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 3+1\cdot 0 \\ 3\cdot 0+0\cdot 2+1\cdot 3 & 3\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1 & 3\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{2ª fila} \times \text{1ª columna} & \text{2ª fila} \times \text{2ª columna} & \text{2ª fila} \times \text{3ª columna} \end{array}$$

FILAS POR COLUMNAS

Propiedades:

- Asociativa: $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
  $k(A\cdot B)=(kA)\cdot B$.
- Distributiva: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
  $(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$.
- Elemento neutro. $A\cdot I=I\cdot A=A$.

¡CUIDADO!

En general **el producto no es conmutativo**:

- $A\cdot B\neq B\cdot A$.
- $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.
- $(A-B)^2\neq A^2-2AB+B^2$.
- $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

Matriz traspuesta A^t

Se obtiene intercambiando el papel de filas y columas:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^t}_{2\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}}_{3\times 2}$$

Propiedades:

- $((A)^t)^t = A$.
- $(A+B)^t = A^t + B^t$.
- $(k\cdot A)^t = k\cdot A^t$.
- $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, **!OJO: cambio de orden!**

Matriz inversa A^{-1}

Cálculo por adjuntos:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)^t}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo por Gauss:

$(A|I) \to (I|\,A^{-1})$

Escalonar con **operaciones fila**:
- Intercambiar filas
- Multiplicar/dividir fila por un número (para conseguir unos)
- Sumar a una fila un múltiplo de otra (hacer ceros)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\to F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2\to F_2+F_3]{F_1\to F_1-3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Propiedades:

- **Definición**: Cumple $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(k\cdot A)^{-1} = \frac{1}{k}\cdot A^{-1}$.
- $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$, **!OJO: cambio de orden!**
- $I^{-1} = I$.
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

¡CUIDADO!

- Una matriz que **NO** es **cuadrada NO** tiene **inversa**.
- Una matriz con **determinante nulo NO** tiene **inversa**.
- Una matriz con una **fila o columna de ceros NO** tiene **inversa**.
- $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.
- Para "despejar" **importa el orden. Si A tiene inversa:**
  $A\cdot X = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}\cdot B$
  $X\cdot A = B \quad \Rightarrow \quad X = B\cdot A^{-1}$

DETERMINANTES. CÁLCULO Y PROPIEDADES.

Cálculo de determinantes (I)

Determinante 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinante 3×3. Regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (\ aei + bfg + dhc\ ) - (\ ceg + bdi + fha\ )$$

Cálculo de determinantes (II)

Adjunto de un elemento:

A_{ij} = **adjunto** del término en la fila i columna j = $(-1)^{i+j}$**determinante** de la matriz al **quitar fila** i **y columna** j

Signos:

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{5} & 0 \\ 2 & \cancel{4} & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 6 - 0 \cdot 2) = -18$$

Determinante por adjuntos:

Se elije una fila (ó columna): el determinante es la suma de los elementos de la fila (ó columna) multiplicados por sus adjuntos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 5 \cdot A_{22} + 4 \cdot A_{32} = 0 \cdot \left(-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\right) + 5 \cdot \left(+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\right) + 4 \cdot \left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right) = 0 + 10 + 24 = 34.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{31} + 4 \cdot A_{32} + 6 \cdot A_{33} = 2 \cdot \left(+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\right) + 4 \cdot \left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right) + 6 \cdot \left(+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right) = -20 + 24 + 30 = 34.$$

Propiedades de los determinantes (línea=fila ó columna)

- El determinante de la identidad es 1. $|I| = 1$
- Al trasponer el determinante no varía:

$$|A^t| = |A|$$

- El determinante de la inversa es la inversa del determinante:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

- Determinante del producto es producto de determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

- Si A es $n \times n$, $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de su diagonal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6. \qquad \begin{vmatrix} 9 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 \cdot 2 = 36.$$

- El determinante de una matriz diagonal es el producto de su diagonal.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6.$$

- Si tiene una línea de ceros, el determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Si tiene dos líneas iguales o proporcionales, el determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- Si una línea es combinación lineal de las otras, el determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- Si se permutan dos líneas el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

- Si a una línea se le suma un múltiplo de otra el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+(-2)\cdot 1 & 2 \\ 2 & 5+(-2)\cdot 2 & 1 \\ 2 & 4+(-2)\cdot 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

- Si una línea se multiplica por k, el determinante se multiplica por k.

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Si una línea es suma de dos, el determinante se descompone en suma de dos determinantes, con las otras líneas invariantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & x+2 \\ 1 & y+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

¡CUIDADO!

Si A, B son matrices $n \times n$:

- $|A+B| \neq |A| + |B|$.
- $|-A| \neq |A|$ (es $|-A| = (-1)^n |A|$)
- $|kA| \neq k|A|$ (es $|kA| = k^n \cdot |A|$)

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Definición

Un **sistema de m ecuaciones lineales** y n incógnitas es un conjunto de m ecuaciones donde las incógnitas tienen exponente 1.
De forma general:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

términos independientes

Si se anulan los términos independientes $(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (0, 0, \ldots, 0)$ el sistema se llama **homogéneo**.

Matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matriz ampliada

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Regla de Cramer

Si A es cuadrada y $\det(A) \neq 0$, entonces la solución única es $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, donde A_i es la matriz que resulta de sustituir en A la columna i por la de términos independientes.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$det(A) = 2 \cdot 3 - (-3) \cdot 1 = 9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{compatible determinado}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{18}{9} = 2, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{9}{9} = 1$$

Para sistemas HOMOGÉNEOS (término independiente nulo).

Siempre son compatibles. Al menos tienen la solución trivial $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$.

- es **compatible determinado** (solución única), si $rango(A) =$nº de incógnitas.
- es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones), si $rango(A) <$nº de incógnitas.

Teorema de Rouché-Frobenius

Sean $rango(A)$ y $rango(\overline{A})$ los rangos de la matriz asociada y la ampliada:

- Si $rango(A) \neq rango(\overline{A})$, el sistema es **incompatible** (NO tiene solución).
- Si $rango(A) = rango(\overline{A})$, el sistema es **compatible** (tiene solución):
  - Si $rango(A) = rango(\overline{A}) = n$, el sistema es **compatible determinado** (solución única).
  - Si $rango(A) = rango(\overline{A}) < n$, el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones). Solución en función de $n - rango(A)$ parámetros.

Ejemplo. Discusión y resolución de sistema 3×3

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Calculamos $rango(A)$ y $rango(\overline{A})$ a la vez escalonando la **matriz ampliada**:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como una vez escalonadas tanto la matriz ampliada como la del sistema tienen dos filas no nulas el rango de ambas es 2:

$rango(A) = rango(\overline{A}) = 2 \quad \Rightarrow \quad$ **Sistema compatible**

$rango(A) = 2 < 3 =$ nº de incógnitas $\quad \Rightarrow \quad$ Sistema compatible **indeterminado**

El sistema tiene solución en función de nº de incógnitas $- rango(A) = 3 - 2 = 1$ parámetros.
Pasamos de la matriz asociada escalonada sin las filas de ceros, al sistema que representa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos en función de z que será el parámetro. Hacia atrás, de la última ecuación a la primera.
De la segunda ecuación $y = z$, y sustituyendo en la primera $x = 1 - y - z = 1 - 2z$.
Llamando t al parámetro (la variable z) las infinitas soluciones quedan: $\boxed{x = 1 - 2t, \quad y = t, \quad z = t \quad t \in \mathbb{R}}$

POLINOMIOS. DIVISIÓN Y FACTORIZACIÓN.

División de polinomios.

- Se escriben los polinomios dividendo y divisor, ordenando sus monomios de mayor a menor grado.
- Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor.
- Se anota el monomio cociente y se multiplica por el divisor.
- Se coloca el producto obtenido debajo del dividendo y se cambia de signo.
- Se suman los términos correspondientes y se repite el proceso con el nuevo polinomio resultante.
- El proceso termina cuando se obtiene un polinomio de grado menor que el divisor: el resto.

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & \text{dividendo} & & & \text{divisor} \\
x^3 & -4x^2 & +6x & -5 & x^2-x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & -x & & x-3 \quad \text{cociente} \\ \cline{1-4}
 & -3x^2 & +5x & -5 & \\
 & 3x^2 & -3x & +3 & \\ \cline{2-4}
 & & 2x & -2 & \\
 & & \text{resto} & &
\end{array}$$

Se expresa como:

$$\underbrace{x^3-4x^2+6x-5}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{divisor}}\underbrace{(x-3)}_{\text{cociente}} + \underbrace{2x-2}_{\text{resto}}$$

ó

$$\frac{\overbrace{x^3-4x^2+6x-5}^{\text{dividendo}}}{\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{divisor}}} = \underbrace{x-3}_{\text{cociente}} + \frac{\overbrace{2x-2}^{\text{resto}}}{\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{divisor}}}$$

RUFFINI: división de un polinomio por $x-a$.

- Se ordena el polinomio dividendo de mayor a menor grado y se completan con ceros los coeficientes de los términos ausentes.
- Se escribe el número a (con signo cambiado) en la parte izquierda de la tabla de Ruffini.
- Se baja el primer coeficiente del polinomio, se multiplica por a y el resultado se coloca debajo del siguiente coeficiente.
- Se suman los números de esa columna y el resultado se coloca abajo.
- Se repite el proceso: multiplicar el resultado por a, colocarlo debajo del coeficiente siguiente y sumar.
- El último número obtenido es el **resto** de la división, y los demás números corresponden a los coeficientes del **cociente**.

Ejemplo: $(x^4-x^2-2x-6):(x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \\
2 & & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2
\end{array}$$

$(*)$ Si falta un coeficiente de un cierto grado se pone un cero.

En este caso falta x^3.

Se expresa como:

$$\underbrace{x^4-x^2-2x-6}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x-2)}_{\text{divisor}}\underbrace{(x^3+2x^2+3x+4)}_{\text{cociente}} + \underbrace{2}_{\text{resto}}$$

ó

$$\frac{\overbrace{x^4-x^2-2x-6}^{\text{dividendo}}}{\underbrace{x-2}_{\text{divisor}}} = \underbrace{x^3+2x^2+3x+4}_{\text{cociente}} + \frac{2}{\underbrace{x-2}_{\text{divisor}}}$$

Factorización de polinomios.

Factorización de un polinomio de grado dos: $ax^2 + bc + c$.

Se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$ =discriminante

- Si tiene dos soluciones x_1, x_2 ($\Delta > 0$) el polinomio queda factorizado como $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si tiene una solución x_1 ($\Delta = 0$) el polinomio queda factorizado como $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Si no tiene solución ($\Delta < 0$) el polinomio **no se puede factorizar (con números reales)**.

Ejemplo: $2x^2 - x - 1$.

$$2x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$\boxed{2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)(x + 1/2)}$$

Ejemplo: $x^2 + 4x + 4$.

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = -2$$

$$\boxed{x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2}$$

Factorización de un polinomio $p(x)$ en general.

- Se busca una raíz del polinomio: un valor x_1 tal que $p(x_1) = 0$.
- Se divide el polinomio entre $(x - x_1)$ (por Ruffini), obteniendo $p(x) = (x - x_1)q(x)$, donde $q(x)$ es el cociente.
- Se repite el procedimiento con $q(x)$ hasta que el polinomio no pueda factorizarse más.

¡IMPORTANTE!

- Para buscar **raíces enteras** de un polinomio con **coeficientes enteros** $x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ se buscan entre divisores del término independiente a_0.
- Para buscar **raíces racionales** de un polinomio con **coeficientes enteros** $a_nx^n + a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ se buscan de la forma p/q, con p divisor de a_0 y q divisor de a_n.
- ¡OJO! Lo anterior sólo sirve para buscar raíces enteras o racionales. **NO SIRVE para cualquier raíz**.
- En general, es **mejor tener un polinomio factorizado** que sin factorizar.

$$\underbrace{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x + 6}_{\text{MENOS ÚTIL}} = \underbrace{(x-1)^2(x+2)(x-3)}_{\text{MÁS ÚTIL}}$$

Ejemplo de factorización de un polinomio.

Factoricemos el polinomio x^3+x^2-5x-6

- Buscamos raíces enteras entre los divisores de 6. Los candidatos son $1,2,3,-1,-2,-3$. Vamos probando con Ruffini buscando resto cero.

$$¿(x-1)?. \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & -9\neq 0 \end{array} \quad \textbf{¡¡NO!!}$$

$$¿(x+2)?. \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -5 & -6 \\ -2 & & -1 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 0=0 \end{array} \quad \textbf{¡¡SI!!}$$

$$(x^2+x-5x-6x)=(x+2)(x^2-x-3).$$

- Como es de grado dos, factorizamos x^2-x-3 resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x^2-x-3=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+12}}{2}=\begin{cases}\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

Por tanto:

$$\boxed{x^3+x^2-5x-6=(x+2)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)}$$

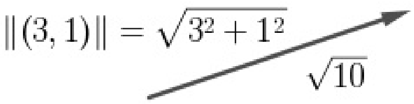
VECTORES. ECUACIONES DE RECTAS Y PLANOS. DISTANCIAS.

Módulo de un vector.

Módulo=Longitud:

$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

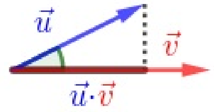


Producto escalar.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos(ang(\vec{u},\vec{v}))$.

$(x,y)\cdot(x',y') = xx'+yy'$

$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = xx'+yy'+zz'$

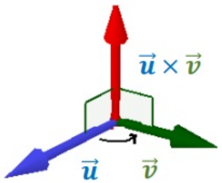


Producto vectorial

$\vec{u} = (x,y,z), \quad \vec{v} = (x',y',z')$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

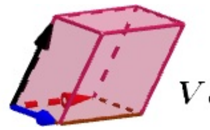
$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||sin(ang(\vec{u},\vec{v}))|$



Producto mixto

$\vec{u} = (x,y,z), \quad \vec{v} = (x',y',z'), \quad \vec{w} = (x'',y'',z'')$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

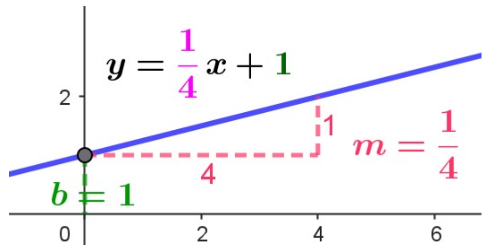


$Vol = |[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$

Ecuación explícita de una recta. Función afín.

$$\boxed{y = m\cdot x + b}$$

- m pendiente = "inclinación" = tg(ángulo con eje OX)
- b coordenada de corte con eje OY
- Misma pendiente = Rectas paralelas o coincidentes
- Distinta pendiente = Rectas que se cortan



Ecuaciones de una recta en el plano.

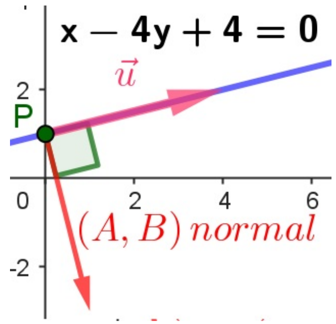
Punto $P = (x_0, y_0)$. Vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$

Vectorial		Paramétricas		Continua	
$(x,y) = (x_0, y_0) + t(u_1, u_2)$	$\xrightarrow{\text{separa coordenadas}}$	$x = x_0 + t\,u_1$ $y = y_0 + t\,u_2$	$\xrightarrow{\text{despeja } t \text{ e iguala}}$	$\dfrac{x-x_0}{u_1} = \dfrac{y-y_0}{u_2}$	$\xrightarrow{\text{simplifica}}$

Implícita

$Ax + By + C = 0$

(A,B) vector normal



Ecuaciones de una recta en el espacio.

Punto $P = (x_0, y_0, z_0)$, Vector director $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Vectorial

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(u_1, u_2, u_3)$$

$\xrightarrow{\text{separa coordenadas}}$

Paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\,u_1 \\ y &= y_0 + t\,u_2 \\ z &= z_0 + t\,u_3 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{despeja } t \text{ e iguala}}$

Continua

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

$\xrightarrow{\text{simplifica 2 a 2}}$

Implícitas

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned}$$

Recta como intersección de dos planos.

Ecuaciones de un plano en el espacio.

Punto: $P = (x_0, y_0, z_0)$ Vectores: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Vectorial

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(u_1, u_2, u_3)$$

Paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\,u_1 + s\,v_1 \\ y &= y_0 + t\,u_2 + s\,v_2 \\ z &= z_0 + t\,u_3 + s\,v_3 \end{aligned}$$

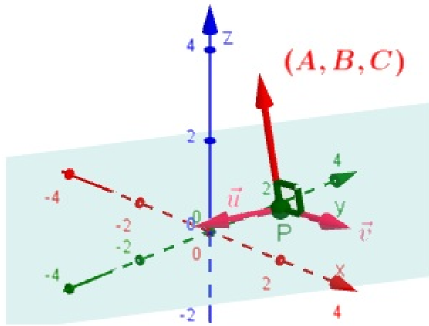
Implícita

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\updownarrow$

Ax+By+Cz+D=0

(A, B, C) vector normal



Distancia de un punto a una recta en el plano.

$r \equiv ax + by + c = 0, \quad P = (x_0, y_0)$

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distancia de un punto a un plano en el espacio.

$\pi \equiv ax + by + bz + d = 0$

$P = (x_0, y_0)$

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distancia de un punto a una recta en el espacio.

$r \equiv \begin{cases} \text{punto: } A \\ \text{v.director: } \vec{u} \end{cases}$, Punto: P.

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan.

$r \equiv \begin{cases} \text{punto: } A \\ \text{v.director: } \vec{u}_r \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} \text{punto: } B \\ \text{v.director: } \vec{u}_s \end{cases}$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{\|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\|}$$