Sean $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8$ las ocho cifras de tu DNI$^{(1)}$. Por ejemplo si el DNI es 32478910, entonces $d_1 = 3$,$d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 7$, $d_5 = 8$, $d_6 = 9$, $d_7 = 1$, $d_8 = 0$.

Para cada i, con $1 \leq i \leq 8$ llamamos a_i al resto de d_i módulo 3, es decir, el resto que se obtiene al dividir d_i por 3. En el ejemplo anterior $a_1 = 0$,$a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $a_5 = 2$, $a_6 = 0$, $a_7 = 1$, $a_8 = 0$.

Consideramos el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de matrices reales 2×2 y los siguientes subconjuntos:

$$H = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$U = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | traza\left(A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0\right\}$$

$$V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A \text{ no tiene inversa}\}$$

1. *¿Cuáles de ellos son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$?. Justificar la respuesta.*

   En general un subconjunto S de un espacio vectorial (real) será un subespacio vectorial si y sólo si cumple dos condiciones:

   \- Contiene el vector cero.

   \- Es cerrado para la suma y el producto por escalar, o en otras palabras, dados $\vec{u}, \vec{v} \in S$ y $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $a\vec{u} + b\vec{v} \in S$.

   Pero hemos demostrado en general en el desarrollo teórico visto en clase y en los apuntes que toda envolvente lineal es siempre un subespacio vectorial. Por tanto directamente H y V son subespacios vectoriales porque son envolventes lineales.

   Para el conjunto U tenemos que:

   \- $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ porque $traza\left(\Omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = traza\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

   \- Además dados $A, B \in U$ cumplen $traza\left(A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), traza\left(B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ veamos que $aA + bB \in U$:

   $$traza\left((aA + bB)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = a \cdot \underbrace{traza\left(A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{0} + b \cdot \underbrace{traza\left(bB\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{0} = 0.$$

   y por tanto efectivamente $aA + bB \in U$.

   Concluimos que U es subespacio vectorial.

   Por último $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$ porque son matrices de determinante nulo que no tienen inversa. Sin embargo su suma es:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$$

   Pero la matriz Id SI es inversible y por tanto no pertenece a W. Así W no es cerrado para la suma y por tanto NO es subespacio vectorial.

2. *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$ respecto de la base canónica.*

Para hallar las implícitas de la intersección calcularemos primero las implícitas de U y V. La unión de ambas serán las ecuaciones de $U \cap V$.

La base canónica de las matrices 2×2 es:

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de manera que una matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tiene coordenadas $(x, y, z, t)_C$ en esa base.

Entonces dada una matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sabemos que pertenece a U si cumple:

$$traza \left(A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \iff traza \left(\begin{pmatrix} y & x \\ t & z \end{pmatrix} \right) = 0 \iff y + z = 0.$$

La ecuación implícita de U en la base canónica es $y + z = 0$.

Por otro lado tenemos:

$$V = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(0, 0, 2, 2)_C, (1, 1, 1, 1)_C, (2, 2, 0, 0)_C\}.$$

Analizamos antes de nada si los generadores son dependientes o no, escalonando la matriz formada por sus coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0)_C, (0, 0, 1, 1)_C\}$ (pero ahora ya sabiendo que esos dos generadores son linealmente independientes).

De generadores pasamos a la ecuación vectorial:

$$(x, y, z, y) = a(1, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 1) = (a, a, b, b).$$

Y de ahí separando coordenadas a las paramétricas:

$$x = a, \quad y = a, \quad z = b, \quad t = b.$$

Eliminando parámetros llegamos a las impícitas. Recordemos que el número de ecuaciones debe de ser la dimensión del espacio total menos el número de parámetros. Queda:

$$x = y, \quad z = t$$

o equivalentemente

$$x - y = 0, \quad z - t = 0.$$

Uniendo las ecuaciones de U y V obtenemos las de la intersección:

$$\begin{array}{l} \left. y + z = 0 \right\} U \\ \left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{array} \right\} V \end{array}$$

Analizamos si son ecuaciones independientes poniendo sus coeficientes como filas de una matriz y escalonando:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos que si son independientes y así las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ quedan:

$$x - y = 0, \qquad y + z = 0, \qquad z - t = 0.$$

Para hallar las paramétricas resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las impícitas. Recordemos que:

$$\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de parámetros} = dim(espacio\, total) - \text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de ecuaciones} = 4 - 3 = 1.$$

Despejando desde la última ecuación a la primera nos queda:

$$z = t, \quad y = -z = -t, \quad x = y = -t.$$

Todo en función de t que será nuestro parámetro. Las paramétricas de $U \cap V$ serán:

$$x = -\lambda, \quad y = -\lambda, \quad z = \lambda, \quad t = \lambda.$$

3. *Hallar $dim(U), dim(V), dim(U \cap V), dim(U + V)$.*

   Hay dos formas principales de determinar la dimensión de un subespacio S:

   $dim(S) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de generadores independientes $= \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de parámetros independientes

   $dim(S) = dim(espacio\, total) - \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de ecuaciones implícitas independientes

   Entonces según lo que hemos visto en el apartado anterior:

   $dim(U) = dim(M_{2\times 2}) - \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de ecuaciones implícitas independientes $= 4 - 1 = 3$.

   $dim(V) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de generadores independientes $= 2$.

   $dim(U \cap V) = dim(M_{2\times 2}) - \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de ecuaciones implícitas independientes $= 4 - 3 = 1$.

   Y por la fórmula de las dimensiones:

   $dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = 3 + 2 - 1 = 4$.

4. *Demostrar que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

   En un espacio de dimensión n un conjunto de vectores B es base si cumple:

   - B tiene n vectores.

   - Los vectores de B son linealmente independientes; equivalentemente el rango de la matriz que forman sus coordenadas respecto a alguna base es n.

   En nuestro caso trabajamos en el espacio de matrices 2×2 y $n = dim(M_{2\times 2}) = 4$.

   - Entonces en primer lugar vemos que B está formado por 4 vectores.

   - Después analizamos si son independientes. En coordenadas respecto a la base canónica los vectores de B son:

$$B = \{(1, 0, 1, 0)_C, (0, 1, 0, 1)_C, (0, 0, 1, 0)_C, (1, 0, 1, 1)_C\}.$$

El rango de la matriz que forman es:

$$rg\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=4.$$

Luego efectivamente son independientes y deducimos que B es base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

5. *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de V respecto de la base B.*

Partimos de las ecuaciones impícitas de V respecto de la base canónica halladas en en ejercicio 2:

$$x-y=0,\quad z-t=0.$$

Matricialmente pueden escribirse así:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=0,\quad \begin{pmatrix}0&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=0.\quad (*)$$

(esas matrices fila no son más que los coeficientes de las dos ecuaciones implícitas).

Ahora usamos la fórmula de cambio de base que realciona las coordenadas $(x,y,z,t)_C$ en la base canónica y las coordendas $(x',y',z',y')_B$ en la base B:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}_C=M_{CB}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}_B,\qquad M_{CB}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Donde M_{CB} es la matriz de cambio de la base B a la base C. Sus columnas son las coordenadas en la base canónica de los vectores de la base B. Sustituyendo en (*) queda:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\end{pmatrix}M_{CB}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=0,\quad \begin{pmatrix}0&0&1&-1\end{pmatrix}M_{CB}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=0.\quad (*)$$

y operando resultan las impícitas de V en la base B:

$$x'-y'+t'=0,\quad x'-y'+z'=0.$$

Resolviendo en función de dos parámetros quedan las paramétricas:

$$x'=a-b,\quad y'=a,\quad z'=b,\quad t'=b.$$

6. *Demostrar que U y H son subespacios suplementarios.*

Para que sean suplementarios tienen que cumplir:

- $U+H=M_{2\times 2}$ (equivalentemente $dim(U+H)=dim(M_{2\times 2})=4$)

- $U\cap H=\{\Omega\}$ (equivalentemente $dim(U\cap H)=0$)

Pero hay unas condiciones equivalentes algo más rápidas de comprobar:

- $dim(U)+dim(H)=4$

- $dim(U+H)=4$ ó $dim(U\cap H)=0$.

Ya vimos en (3) que $dim(U) = 3$ y como H está generado por un sólo vector $dim(H) = 1$. Por tanto la primera condición se cumple:

$$dim(U) + dim(H) = 3 + 1 = 4.$$

Para la segunda según veremos en (8), U está generado por

$$\{(1,0,0,0)_C, (0,1,-1,0)_C, (0,0,0,1)_C\}.$$

Además $H = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = (0,1,0,1)_C$. Entonces la suma $U + H$ está generada por todos esos generadores (los de uno y otro subespacio):

$$U + H = \mathcal{L}\{\underbrace{(1,0,0,0)_C, (0,1,-1,0)_C, (0,0,0,1)_C}_{U}, \underbrace{(0,1,0,1)_C}_{H}\}$$

y así:

$$dim(U{+}H) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Se cumplen por tanto las dos condiciones indicadas y se deduce que son suplementarios.

7. *Hallar la matriz $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que es la proyección de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sobre H paralelamente a U.*

   Para hallar la proyección escribiremos primero el vector a proyectar en una base de $M_{2\times 2}$ que combina una base de U y otra de H. La hemos visto en el apartado anterior:

   $$D = \{\underbrace{(1,0,0,0)_C, (0,1,-1,0)_C, (0,0,0,1)_C}_{U}, \underbrace{(0,1,0,1)_C}_{H}\}$$

   Cambiamos de base $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (0,1,2,1)_C$ a la base D:

   $$M_{DC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{CD}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Esto significa que:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{0 \cdot (1,0,0,0)_C - 2 \cdot (0,1,-1,0)_C - 2 \cdot (0,0,0,1)_C}_{U} + \underbrace{3(0,1,0,1)_C}_{H}.$$

   La proyección sobre H es quedarse con la parte que está en H:

   $$3(0,1,0,1)_C = (0,3,0,3)_C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. *Dar tres matrices de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que formen una base de U.*

   Vimos en el apartado (2) que la ecuación impícita de U es $y + z = 0$. Resolviendo obtenemos las paramétricas en función de $3 = (dim(U))$ parámetros:

   $$x = a, \quad y = b, \quad z = -b, \quad t = c.$$

Así la ecuación vectorial es:

$$(x,y,z,t)_C = (a,b,c,-b) = a(1,0,0,0)_C + b(0,1,-1,0)_C + c(0,0,0,1)_C.$$

y una base de U es la formada por esos tres generadores:

$$\{(1,0,0,0)_C, (0,1,-1,0)_C, (0,0,0,1)_C\}$$

Finalmente los expresamos como matrices de nuestro espacio vectorial $M_{2\times 2}$ pasando de coordenadas en la base canónica a la matriz que representan:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

9. *Dar las ecuaciones paramétricas en la base canónica de un subespacio vectorial S de manera que S y V sean suplementarios.*

Vimos en (2) y (3) que $V = \mathcal{L}\{(1,1,0,0)_C, (0,0,1,1)_C\}$ y $dim(V) = 2$.

Análogamente a lo expuesto en el apartado 7 para U y H, para que S y V sean suplementarios tienen que cumplir que $dim(S)+dim(V) = 4$ y que $dim(S+V) = 4$.

Por tanto $dim(S) = 4 - dim(V) = 4 - 2 = 2$ y estará generado por 2 vectores independientes. Para que además se cumpla que $dim(S+V) = 4$ estos han de ser escogidos de forma que junto con los dos generadores de V formen una matriz de rango 4. Observando los generadores de V es fácil darse cuenta que basta tomar por ejemplo (hay infinidad de opciones):

$$S = \mathcal{L}\{(0,1,0,0)_C, (0,0,0,1)_C\}$$

Efectivamente cumple que $dim(S+V) = 4$ porque:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Por tanto las paramétricas de S quedan:

$$x = 0, \quad y = a, \quad z = 0, \quad t = b$$

y las implícitas:

$$x = 0, \quad z = 0.$$