Consideramos el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de matrices reales 2×2. Sean los siguientes subconjuntos:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | traza(A) = 0\}$$

$$V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | det(A) = 0\}$$

$$Z = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

1. *¿Cuáles de ellos son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$?. Justificar la respuesta.*

   En general un subconjunto N de un espacio vectorial real M es un subespacio vectorial si cumple dos condiciones:

   - El vector cero pertence a N.

   - Si $\vec{u}, \vec{v} \in N$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in N$. Esta condición también se puede desglosar en dos: si $\vec{u}, \vec{v} \in N$ entonces $\vec{u} + \vec{v} \in N$ y si $\vec{u} \in N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda\vec{u} \in N$.

   Como trabajamos en el espacio vectorial de matrices $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a los vectores les llamaremos A y B, en lugar, de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

   i) Veamos que $U = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | traza(A) = 0\}$ es subespacio.

   - La matriz nula está en U porque tiene traza 0.

   - Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B \in U$, es decir, cumpliendo $traza(A) = traza(B) = 0$. Entonces:

   $$traza(\alpha A + \beta B) = \alpha traza(A) + \beta traza(B) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

   Por tanto $\alpha A + \beta B \in U$.

   ii) El conjunto $V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ está definido como una envolvente lineal y hemos visto en teoría que toda envolvente lineal es un subespacio vectorial.

   iii) El conjunto $W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | det(A) = 0\}$ NO es subespacio. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pertenecen a W porque tienen determinante nulo. Sin embargo $A + B = Id$ y $det(Id) = 1 \neq 0$. Luego $A + B \notin W$. No cumple la condición de subespacio.

   iv) Finalmente $Z = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ está definida de nuevo como una envolvente lineal y así es un subespacio.

2. *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$ respecto de la base canónica.*

   Para hallar las ecuaciones implícitas de la intersección primero calculamos las implícitas de cada uno de los dos subespacios. Trabajaremos en la base canónica de matrices 2×2:

   $$C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

   Una matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tiene coordenadas $(x, y, z, t)_C$ en la base canónica.

   Comenzamos con el subespacio U. Está formado por las matrices de traza nula. Pero:

   $$traza\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 0 \quad \iff \quad x + t = 0.$$

   Por tanto:

   $$U = \{(x, y, z, t)_C | x + t = 0\}$$

   y precisamente $x + t = 0$ es la ecuación implíita en la base canónica que define U.

   Continuamos con el subespacio V del cuál conocemos los generadores. Comenzamos expresándolos en coordenadas respecto a la base canónica:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv (0, 2, 0, 2)_C, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1, 1, 1, 1)_C \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv (2, 0, 2, 0)_C$$

   Escalonamos la matriz que forman sus coordenadas para eliminar los posibles generadores dependientes:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
   $$\xrightarrow{H_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Deducimos que $V = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0)_C, (0, 1, 0, 1)_C\}$. Ahora de los generadores independientes podemos escribir las paramétricas:

   $$(x, y, z, t)_C = \alpha(1, 0, 1, 0)_C + \beta(0, 1, 0, 1)_C$$

   y separando coordenadas:

   $$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \\ z &= \alpha \\ t &= \beta \end{aligned}$$

   Pasamos a implícitas eliminando los parámetros. De la primera ecuación $\alpha = x$ y susituyendo en el resto:

   $$y = \beta, \qquad z = x, \qquad t = \beta.$$

Después $\beta = y$ y sustituyendo en las otras dos:

$$z = x, \qquad t = y.$$

Es decir las impícitas de V en la base cañonicas son (pasando en cada una de ellas todos los términos a un lado):

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y - t &= 0 \end{aligned}$$

Las implícitas de $U \cap V$ se obtienen uniendo las de U y V:

$$U \equiv x + t = 0$$
$$V \equiv \left\{ \begin{aligned} x - z &= 0 \\ y - t &= 0 \end{aligned} \right.$$

Eliminamos las ecuaciones dependientes escalonando la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las ecuaciones implícitas de la intersección en la base canónica:

$$U \cap V \equiv \left\{ \begin{aligned} x + t &= 0 \\ y - t &= 0 \\ z + t &= 0 \end{aligned} \right.$$

Para hallar las paramétricas resolvemos el sistema en función de:

$$dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) - \text{nº de ecuaciones} = 4 - 3 = 1 \text{ parámetros}$$

Ponemos todas las variables en función de t:

$$z = -t, \quad y = t, \quad x = -t$$

Las paramétricas de $U \cap V$ quedan:

$$\begin{aligned} x &= -\alpha \\ y &= \alpha \\ z &= -\alpha \\ t &= \alpha \end{aligned}$$

3. *Hallar $dim(U), dim(V), dim(U \cap V), dim(U + V)$.*

   Las dimensiones las obtenemos directamente de los cálculos hechos en el apartado anterior:

   - Hemos visto que U está definido por una ecuación implícita. Por tanto:

   $$dim(U) = dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) - \text{nº de ecuaciones} = 4 - 1 = 3.$$

   - $V = \mathcal{L}\{(1,0,1,0)_C, (0,1,0,1)_C\}$ está generado por 2 vectores independientes, luego $dim(V) = 2$.

   - Las ecuaciones paramétricas de $U \cap V$ dependen de 1 parámetro; entonces $dim(U \cap V) = 1$.

   - Finalmente por la fórmula de las dimensiones:

   $$dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

4. *Demostrar que* $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *es una base de* $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   Dado que B está formada por cuatro vectores y $dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$, para ver que forman base es suficiente con comprobar que son independientes. Equivalentemente que el rango de la matriz de coordenadas de los cuatro vectores de B respecto de la base canónica es 4. Pero:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (1,1,0,0)_C, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv (0,0,1,1)_C,$$
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (0,1,0,0)_C, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1,1,0,1)_C$$

   Escalonamos la matriz de coordenadas para calcular su rango:

   $$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

5. *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de V respecto de la base B.*

   Habíamos calculado las ecuaciones de V en la base canónica:

   $$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y - t &= 0 \end{aligned}$$

   Matricialmente pueden escribirse como:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

   Además conocemos la fórmula de cambio de base que relaciona las coordenadas en la base C y en la base B:

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_B, \qquad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde la matriz M_{CB} de cambio de la base B a la canónica está formada por las coordenadas de los vectores de B en función de la canónica puestas en columnas. Susituyendo en (*):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando quedan las implícitas en la base B:

$$\begin{aligned} x' - y' + t' = 0 \\ x' - y' + z' = 0 \end{aligned}$$

Finalmente resolviendo el sistema paramétricamente obtenemos las paramétricas. El número de parámetros es.

$$\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de parámetros} = dim(\mathcal{M}_{2\times 2}) - \text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de ecuaciones} = 4 - 2 = 2.$$

Queda:

$$x' = \alpha - \beta, \quad y' = \alpha, \quad z' = \beta, \quad t' = \beta.$$

6. *Demostrar que U y Z son subespacios suplementarios.*

Para que sean suplementarios tienen que cumplir $U+Z = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $U\cap Z = 0$.

Equivalentemente que:

i) $dim(U+Z) = dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}))$.

ii) $dim(U) + dim(Z) = dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}))$.

Sabemos que $dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$.

Vimos que $dim(U) = 1$ y como Z está generada por un sólo vector no nulo, $dim(Z) = 1$. Por tanto $dim(U) + dim(Z) = 3 + 1 = 4$ y se cumple una condición.

Para hallar $dim(U+Z)$ utilizamos que la suma está generada por los generadores de ambos subespacios. El de Z nos lo dan y los de U los calculamos a partir de la implícita resolviendo paramétricamente $x + t = 0$. Queda:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \quad t = -\alpha.$$

Por tanto $U = \mathcal{L}\{(1,0,0,-1)_C, (0,1,0,0)_C, (0,0,1,0)_C\}$ y:

$$dim(U+Z) = dim(\mathcal{L}\{\underbrace{(1,0,0,-1)_C, (0,1,0,0)_C, (0,0,1,0)_C}_{U}, \underbrace{(0,0,1,1)_C}_{Z}\}) =$$

$$= rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Vemos que se cumple la otra condición y así son suplementarios.

7. *Hallar la matrix $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que es la proyección de $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sobre Z paralelamente a U.*

Para realizar la proyección primero construimos una base formada por una base de U y una de Z. Las tenemos calculadas del apartado anterior:

$$B' = \{\underbrace{(1,0,0,-1)_C, (0,1,0,0)_C, (0,0,1,0)_C}_{U}, \underbrace{(0,0,1,1)_C}_{Z}\}$$

El vector $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv (0,2,1,1)_C$ que queremos calcular lo escribiremos en esa base. Para ellos hacemos el cambio de base:

$$M_{B'C} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \qquad \text{donde} \quad M_{B'C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} (0,2,1,1)_C &= (0,2,0,1)_B = \\ &= \underbrace{0\cdot(1,0,0,-1)_C + 2\cdot(0,1,0,0)_C + 0\cdot(0,0,1,0)_C}_{U} + \underbrace{1\cdot(0,0,1,1)_C}_{Z} \end{aligned}$$

En la proyección sobre Z nos quedamos con la parte que está en Z de la descomposición anterior:

$$1\cdot(0,0,1,1)_C = (0,0,1,1)_C \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. *Dar tres matrices de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que formen una base de U.*

Ya habíamos obtenido en el apartado 6 que U está generado por los siguientes vectores independientes (y por tanto por la siguiente base):

$$\{(1,0,0,-1)_C, (0,1,0,0)_C, (0,0,1,0)_C\}$$

Simplemente las traducimos en las matrices que representan:

$$(1,0,0,-1)_C \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (0,1,0,0)_C \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (0,0,1,0)_C \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. *Dar las ecuaciones paramétricas en la base canónica de un subespacio vectorial S de manera que S y V sean suplementarios.*

Sabemos que $dim(V) = 2$. Para que S y V sean suplementarios tiene que cumplirse que:

$$\begin{aligned} &1) \quad dim(S+V) = dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4 \\ &2) \quad dim(S) + dim(V) = dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4 \end{aligned}$$

La segunda condición dado que $dim(V) = 2$, equivale a que $dim(S) = 2$, es decir, buscamos un subespacio generado por 2 vectores independientes.

Dado que $S + V$ se genera con una base de V y otra de S, y sabemos que $V = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0)_C, (0, 1, 0, 1)_C\}$, basta encontrar dos vectores que unidos a los dos que generan V formen una matriz de rango 4:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = 4.$$

Podemos por ejemplo, elegir dos vectores que directamente dejen la matriz escalonada sin filas nulas:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Es decir tomamos $S = \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 0)_C, (0, 0, 0, 1)_C\}$. Sus paramétricas son:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \alpha, \quad t = \beta.$$