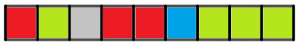
Sean $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8$ las ocho cifras de tu DNI[(1)]. Por ejemplo si el DNI es 32478910, entonces $c_1 = 3$,$c_2 = 2$, $c_3 = 4$, $c_4 = 7$, $c_5 = 8$, $c_6 = 9$, $c_7 = 1$, $c_8 = 0$.

A lo largo del trabajo $k = c_1 + 10 + c_7$ y $m = c_1 + 2$.

1. *Se tiene una cinta cuadriculada como en el dibujo formada por k casillas; hay además m colores disponibles.*



   (a) *¿De cuántas formas distintas puede colorearse la cinta?.*

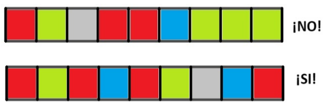
   Cada posible coloración consiste en una elección de k colores (uno por casilla) entre un total de m posibles, pudiendo repetirlos y de manera que importa el orden (los mismos colores en un orden diferente, son un coloreado distinto). Se trata de variaciones con repetición de m elementos tomados de k en k:

$$VR_{m,k} = m^k.$$

   Otra forma de razonarlo es la siguiente. La primera casilla puede colorearse de m formas distintas (una por color); por cada una de ellas, otras m formas para la segunda casilla; y así sucesivamente. En total:

$$\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{k \text{ veces}} = m^k.$$

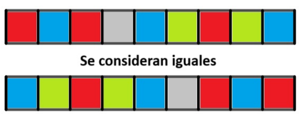
   (b) *¿De cuántas formas distintas puede colorearse si casillas consecutivas no pueden estar del mismo color?*



   La primera casilla puede colorearse de m formas distintas (una por color); por cada una de ellas $m - 1$ formas para la segunda casilla (porque no queremos repetir el color de la primera); de nuevo por cada una de ellas $m - 1$ formas para la tercera casilla (porque no queremos repetir el color de la segunda, aunque si recuperamos el de la primera) y así sucesivamente. En total:

$$m \cdot \underbrace{(m-1) \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-1)}_{k-1 \text{ veces}} = m(m-1)^{k-1}.$$

   (c) *Responde a las dos preguntas anteriores, pero ahora teniendo en cuenta que cintas simétricas se consideran como la misma, ya que se puede pasar de una a la otra girándola 180 grados. Por ejemplo estas dos configuraciones se consideran iguales:*



Tenemos en cuenta que con este punto de vista cada coloración de cinta que NO coincide con su simétrica en nuestro conteo inicial está repetida dos veces. Por ejemplo $BBBN$ lo contamos dos veces como $BBBN$ y como $NBBB$; pero las simétricas (les llamaré capicúas por analogía con los números) si las hemos contado sólo una vez, por ejemplo $BNNB$.

Entonces en cada uno de las dos preguntas iniciales y con el matiz de la simetría el número de coloraciones distintas será:

$$\frac{\text{total} - \text{capicúas}}{2} + \text{capicúas} = \frac{\text{total} + \text{capicúas}}{2}.$$

Para poder aplicar esto nos falta contar en cada caso cuantas coloraciones capicúas hay.

i. **Si podemos repetir colores libremente**.
La coloración queda determinada si fijamos la mitad de los colores, porque si pretendemos que sea simétrica, la otra mitad será copia de los iniciales en orden inverso. En concreto si k es par basta fijar los $k/2$ primeros colores y si es impar los $(k+1)/2$ primeros colores. Esto equivale a fijar los $[(k+1)/2]$ colores siendo $[x]$ la función parte entera:

$$\text{capicúas} = V_{m,[(k+1)/2]} = m^{[(k+1)/2]}$$

Por tanto el número de configuraciones distintas salvo simetría es:

$$\frac{\text{total} + \text{capicúas}}{2} = \frac{m^k + m^{[(k+1)/2]}}{2}.$$

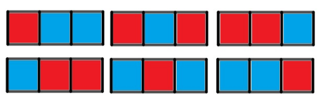
ii. **Si no puede haber casillas consecutivas del mismo color**.
Aquí aunque la idea es la misma hay que tener un poco de cuidado si k es par. En ese caso es imposible que una coloración sin colores consecutivos del mismo color sea capicúa porque la casilla $k/2$ debería de tener el mismo color que la $(k+1)/2$. Eso violarí la restricción de que casillas consecutivas no pueden ser del mismo color.
Por tanto:
- Si k es par capicúas $= 0$ y el número de configuraciones distintas salvo simetría es:

$$\frac{\text{total} + \text{capicúas}}{2} = \frac{m(m-1)^{k-1}}{2}.$$

- Si k es impar capicúas $= m(m-1)^{(k+1)/2-1}$ y el número de configuraciones distintas salvo simetría es:

$$\frac{\text{total} + \text{capicúas}}{2} = \frac{m(m-1)^{k-1} + m(m-1)^{(k-1)/2}}{2}.$$

2. *Ahora supongamos que nuestra cinta es de longitud n y sólo podemos usar 2 colores. Además cada uno de ellos no puede usarse en más de dos casillas consecutivas. Por ejemplo para $n = 3$ estas serían todas las posibilidades (seis en total):*



Sea a_n el número de formas de colorear una cinta de longitud n.

(a) *Justificar que se cumple la relación $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$.*

Dada una cinta de longitud n coloreada con el criterio indicado o bien acaba en dos casillas del mismo color; o bien acaba en dos casillas de colores diferentes.

Una cinta de longitud n que acaba con dos casillas del mismo color necesariamente se constuye añadiendo dos casillas a una cinta C_{n-2} de longitud $n-2$ coloreadas con el color diferente al de la última casilla de C_{n-2}.

Una cinta de longitud n que acaba con dos casillas de distinto color necesariamente se constuye añadiendo una casilla a una cinta C_{n-1} de longitud $n-1$ coloreada con el color diferente al de la última casilla de C_{n-1}.

Por tanto el número de cintas de longitud n es igual al número de cintas de longitud $n-2$ sumado al número de cintas de longitud $n-1$.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

(b) *Comprobar que se cumple:*

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si hacemos el producto que se indica la relación que se pide comprobar es:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Pero por el apartado anterior sabemos que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ luego la igualdad indicada es cierta.

(c) *Demostrar que* $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Lo probamos por inducción:

- Para $n = 2$ la igualdad es cierta ya que $A^{2-2} = Id$ y simplemente la expresión queda:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = Id \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

- Suponemos cierto para n, es decir, que $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, y la probaremos para $n+1$, es decir, quremos demostrar que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Pero usando la hipótesis de inducción:

$$A^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A \cdot A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

y por el apartado anterior:

$$A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

(d) *Calcula A^{k-2}. Intenta realizar el menor número posible de producto de matrices. (Detalla las cuentas intermedias que hagas).*

En principio para calcular A^{k-2} no hay más que multiplicar sucesivamente la matriz por si misma $k-3$ veces. Por ejemplo si $k = 20$, calcular A^{18} supondría realizar $20-3=17$ productos de matrices. Pero esto se puede realizar de manera más óptima si organizamos así los cálculos:

$$A^2 = A\cdot A,\quad A^4 = A^2\cdot A^2,\quad A^8 = A^4\cdot A^4,\quad A^9 = A^8\cdot A,\quad A^{18} = A^9\cdot A^9.$$

de manera que sólo con 5 productos de matrices conseguimos llegar igualmente a A^{18}. Hacemos los cálculos:

$$\begin{aligned}
A^2 &= A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\\
A^4 &= A^2\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\\
A^8 &= A^4\cdot A^4 = \begin{pmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{pmatrix}\\
A^9 &= A^8\cdot A = \begin{pmatrix} 55 & 34 \\ 24 & 21 \end{pmatrix}\\
A^{18} &= A^9\cdot A^9 = \begin{pmatrix} 4181 & 2584 \\ 2584 & 1597 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(e) *Calcular a_k.*

Hemos visto que:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = A^{k-2}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Donde a_1, es el número de coloraciones distintas para un tablero de longitud uno. Hay $a_1 = 2$ posiblidades:

y a_2, es el número de coloraciones distintas para un tablero de longitud dos. Hay $a_2 = 4$ posiblidades:

Nos queda entonces:

$$\begin{pmatrix} a_{20} \\ a_{19} \end{pmatrix} = A^{18}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21892 \\ 13530 \end{pmatrix}$$

y por tanto:

$$a_{20} = 21892.$$