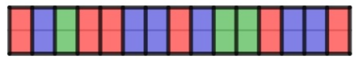
El **teselado** consiste en recubrir una determinada superficie con ciertas formas geométricas iguales, de manera que éstas no se superpongan y rellenen por completo el área deseada.

En esta práctica se estudian ciertas teselaciones desde el punto de vista combinatorio, aplicando en el cálculo teoría de matrices.

1. *Tenemos baldosas de tamaño 2×1 de colores rojo, verde y azul. ¿De cuántas formas distintas puede cubrirse un pasillo de tamaño 2×15? (las baldosas no pueden girarse).*



Método I: Cada posible forma de recubrir un pasillo consiste en elegir un grupo de 15 colores elegidos entre los 3 disponibles. Podemos repetir cada color cuantas veces queramos. Además el orden diferencia un pasillo de otro: por ejemplo no es lo mismo colocar primero una baldosa roja y 14 verdes, que primero 14 verdes y luego una roja.

Se trata por tanto de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 15 en 15:

$$VR_{3,15} = 3^{15} = 14348907.$$

Método II: Para poner la primera baldosa tenemos tres opciones: roja, verde o azul. Por cada una de ellas para la segunda otras tres. Y así sucesivamente. Queda por tanto:

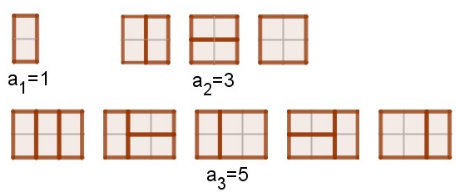
$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{15 \text{ veces}} = 3^{15} = 14348907.$$

2. *Y si tenemos exactamente cinco baldosas de tamaño 2×1 de cada color (rojo, verde y azul). ¿De cuántas formas distintas puede cubrirse un pasillo de tamaño 2×15? (las baldosas no pueden girarse).*

Ahora tenemos fijadas cuantas baldosas de cada color podemos usar: cinco de cada uno. Lo único que diferencia una colocación de otra es el orden en que aparecen esas baldosas. Es decir se trata de contar las formas de reordenar 15 elementos de los cuales hay 5, 5 y 5 iguales entre si (rojos, verdes y azules respectivamente). Son permutaciones con repetición:

$$PR_{15;5,5,5} = \frac{15!}{5!5!5!} = 756756.$$

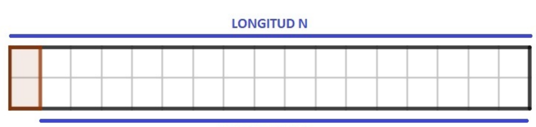
3. *Vamos a considerar que tenemos ahora baldosas de un sólo color de tamaño 2×1 y de tamaño 2×2. Ahora permitimos girar las baldosas de manera que las rectangulares también pueden colocarse en horizontal, como una baldosa de tamaño 1×2. Se trata de contar de cuantas formas distintas podemos cubrir un pasillo de dimensión $2 \times n$. Llamaremos a_n a ese número.*



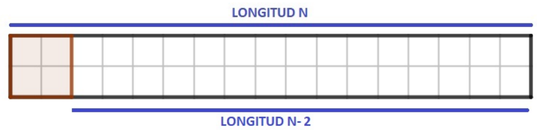
(a) *Justificar la relación $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, para $n \geq 3$.*

Recordemos que a_n es el número de formas de cubrir un pasillo de longitud n usando las baldosas permitidas. Ahora dependiendo de la baldosa que pongamos en primer lugar los dividimos en tres grupos:

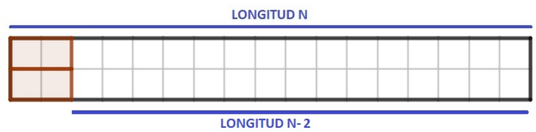
1) Pasillos de longitud n donde colocamos en primer lugar una baldosa 2×1. ¿Cuántos hay de este tipo? Tantos como formas de cubrir las $n-1$ casillas restantes. Es decir tantos como formas de cubir un pasillo de longitud $n-1$, esto es, a_{n-1}.



2) Pasillos de longitud n donde colocamos en primer lugar una baldosa 2×2. ¿Cuántos hay? Tantos como formas de cubrir las $n-2$ casillas restantes. Es decir tantos como formas de cubir un pasillo de longitud $n-2$, esto es, a_{n-1}.



3) Pasillos de longitud n donde colocamos en primer lugar dos baldosas 1×2, una en la fila superior a la otra. ¿Cuántos hay? De nuevo tantos como formas de cubrir las $n-2$ casillas restantes: a_{n-1}.



Por tanto el número total de formas de cubrir un pasillo de longitud n es la suma de las formas de cubrir pasillos de longitud n de cada uno de estos tres tipos:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-2} = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

(b) *Comprobar que se cumple*:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hacemos el producto:

$$A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + 2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

pero por la fórmula vista en (a) aplicada para pasillos de longitud $n+2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ queda:

$$A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + 2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

(c) *Deducir que:*

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \qquad \textit{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lo probaremos por inducción.
1) Primero demostramos el caso base que es $n = 2$ (no tiene sentido $n = 1$ porque en ese caso a_{n-1} no está definido, porque no hay pasillos de longitud cero).
Simplmemente notamos que para $n = 2$:

$$A^{2-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = Id \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{con } n = 2)$$

2) Ahora suponemos la fórmula cierta para el caso $n-1$ es decir que:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-3} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{Hipótesis de Inducción } (*)$$

y la probaremos para n, es decir, probaremos que:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Pero:

$$A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A^{1+n-3} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = AA^{n-3} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{*} A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \underbrace{=}_{(b)} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(d) *Verificar que tomando* $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *se cumple:*

$$P^{-1}AP = D \text{ con } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la inversa de P por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{21}(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{2}(1/3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{12}(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Obtenemos $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ y hacemos las cuentas:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

(e) *Concluir que* $A^n = PD^nP^{-1}$.

Razonamos por inducción.

1) Probamos el caso base para $n = 1$, es decir, que $A^1 = PD^1P^{-1}$.

En el apartado anterior vimos que $P^{-1}AP = D$. Multiplicamos a la izquierda por P y a la derecha por P^{-1} en ambos miembros de la ecuación:

$$PP^{-1}APP^{-1} = PDP^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A = PDP^{-1}.$$

2) Suponemos cierto el caso $n-1$, es decir, que $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$ y lo probamos para n, es decir, probaremos que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Tenemos:

$$A^n = AA^{n-1} = APD^{n-1}P^{-1}$$

Ahí hemos usado la hipótesis de inducción. Además sabemos por el caso $n = 1$ que $A = PDP^{-1}$. Sustituyendo:

$$A^n = PDP^{-1}PD^{n-1}P^{-1} = PDIdD^{n-1}P^{-1} = PDD^{n-1}P^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

(f) *Con todo lo anterior hallar una fórmula general para* a_n *y calcular* a_{15}.

Del apartado (c) sabemos que:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte del apartado (e):

$$A^{n-2} = PD^{n-2}P^{-1}$$

La potencia D^{n-2} es inmediata por ser la potencia de una matriz diagonal. Basta elevar al exponente los términos de la diagonal:

$$D^{n-2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-2} = \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} A^{n-2} &= P \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 2^{n-1} \\ (-1)^{n-1} & 2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A^{n-2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 2^{n-1} \\ (-1)^{n-1} & 2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 2^{n-1} \\ (-1)^{n-1} & 2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}((-1)^{n-2} + 2^{n+1}) \\ \frac{1}{3}((-1)^{n-1} + 2^{n}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quedándonos con el primer elemento de las matrices de cada miembro de la igualda queda:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3}((-1)^{n-2} + 2^{n+1})}$$

Finalmente lo aplicamos para $n = 15$:

$$a_{15} = \frac{1}{3}((-1)^{15-2} + 2^{15+1}) = \frac{1}{3}(-1 + 2^{16}) = 21845.$$