3. Aplicaciones lineales.

1 Definición y propiedades.

Definición 1.1 *Sean U y V dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Decimos que $f : U \longrightarrow V$ es una* **aplicación lineal** *u* **homomorfismo** *si cumple:*

1. $f(\bar{x} + \bar{x}') = f(\bar{x}) + f(\bar{x}')$, *para cualesquiera* $\bar{x}, \bar{x}' \in U$.
2. $f(\alpha\bar{x}) = \alpha f(\bar{x})$, *para cualesquiera* $\alpha \in \mathbb{K}$, $\bar{x} \in U$.

o equivalentemente:

3. $f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}') = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{x}')$, *para cualesquiera* $\alpha \in \mathbb{K}$, $\bar{x}, \bar{x}' \in U$.

Observación 1.2 *Veamos la equivalencia entre las condiciones* 1., 2. *y la condición* 3.*:*

$1., 2. \quad \Longrightarrow \quad 3.$*:*

Dados $\alpha \in \mathbb{K}$, $\bar{x}, \bar{x}' \in U$ *se tiene:*

$$f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}') \underset{(1.)}{\underset{\uparrow}{=}} f(\alpha\bar{x}) + f(\beta\bar{x}') \underset{(2.)}{\underset{\uparrow}{=}} \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{x}').$$

$3. \quad \Longrightarrow \quad 1., 2.$*:*

Si aplicamos la propiedad 3. *para* $\alpha = \beta = 1$ *y cualesquiera* $\bar{x}, \bar{x}' \in U$, *obtenemos la propiedad* 1..

Si aplicamos la propiedad 3. *para* $\beta = 0$, $\bar{x}' = \bar{0}$ *y cualesquiera* $\alpha \in \mathbb{K}$, $\bar{x} \in U$, *obtenemos la propiedad* 2..

Algunas propiedades de las aplicaciones lineales son:

a) $f(-\bar{x}) = -f(\bar{x})$.

Prueba: Aplicamos la propiedad 2. de la definición:

$$f(-\bar{x}) = f((-1)\bar{x}) = (-1)f(\bar{x}) = -f(\bar{x}).$$

b) $f(\bar{x} - \bar{x}') = f(\bar{x}) - f(\bar{x}')$.

Prueba: Basta aplicar la propiedad 3. de la definición para $\alpha = 1$ y $\beta = -1$.

c) $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Teniendo en cuenta la propiedad anterior:

$$f(\bar{0}) = f(\bar{0} - \bar{0}) = f(\bar{0}) - f(\bar{0}) = \bar{0}.$$

d) *Propiedad fundamental:*

Una aplicación lineal queda completamente determinada si conocemos la imagen de los elementos de una base

Prueba: Si $B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\}$ es una base de U, cualquier otro vector $\bar{x} \in U$ se expresa de manera única como combinación lineal de los elementos de B. Aplicando las propiedades de la defención de aplicación lineal se tiene:

$$f(\bar{x}) = f(x^1\bar{u}_1 + \ldots + x^m\bar{u}_m) = x^1 f(\bar{u}_1) + \ldots + x^m f(\bar{u}_m).$$

De manera simplificada se escribe:

$$f(\bar{x}) = f(x^i\bar{u}_i) = x^i f(\bar{u}_i).$$

e) *Sea $A = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_p\}$ un conjunto de vectores de A y $f(A) = \{f(\bar{a}_1), \ldots, f(\bar{a}_p)\}$ sus imágenes:*

e.1) *Si $f(A)$ es un sistema libre entonces A es un sistema libre.*
Prueba: Tomamos una combinación lineal de elementos de A igualada a $\bar{0}$:

$$\alpha^1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha^p\bar{a}_p = \bar{0}.$$

Aplicamos f a cada miembro de la igualdad:

$$f(\alpha^1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha^p\bar{a}_p) = f(\bar{0}) \quad \Rightarrow \quad \alpha^1 f(\bar{a}_1) + \ldots + \alpha^p f(\bar{a}_p) = \bar{0}$$

Por ser $f(A)$ un sistema libre, $\alpha^1 = \ldots = \alpha^p = 0$ y deducimos que A es un sistema libre.

e.2) *Si A es un sistema ligado entonces $f(A)$ es un sistema ligado.*
Prueba: Si A es un sistema ligado entonces uno de los vectores de A es combinación lineal de los demás. Supongamos que es $\bar{a}_1$:

$$\bar{a}_1 = \alpha^2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha^p\bar{a}_p.$$

Aplicamos f a cada miembro de la igualdad:

$$f(\bar{a}_1) = f(\alpha^2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha^p\bar{a}_p) \quad \Rightarrow \quad f(\bar{a}_1) = \alpha^2 f(\bar{a}_2) + \ldots + \alpha^p f(\bar{a}_p).$$

Vemos que uno de los vectores de $f(A)$ es combinación lineal de los demás y por tanto el sistema $f(A)$ es ligado.

Observación: El recíproco de estos dos resultados no es cierto. Puede ocurrir que A sea libre y $f(A)$ sea ligado. Por ejemplo si tomamos la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad f(x, y) = x + y.$$

y $A = \{(1, 0), (1, 1)\}$. Entonces $f(A) = \{1, 2\}$ y vemos que A es un sistema libre pero $f(A)$ es ligado.

f) Si $f : U \longrightarrow V$ es una aplicación lineal y S un subespacio vectorial de U, entonces la **restricción de f a S** es la aplicación:

$$f_s : S \longrightarrow V, \qquad f_s(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

2 Expresión matricial de un homomorfismo.

Sean U y V dos espacios vectoriales sobre K. Supongamos que tenemos dos bases B_1 y B_2 de U y V respectivamente:

$$B_1 = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\}; \qquad B_2 = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}.$$

La imagen de cada uno de los vectores de B_1 es un vector de V y podrá expresarse de manera única como combinación lineal de los vectores de B_2:

$$\begin{array}{c} f(\bar{u}_1) = a_{11}\,\bar{v}_1 + a_{21}\,\bar{v}_2 + \ldots + a_{n1}\,\bar{v}_n \\ f(\bar{u}_2) = a_{12}\,\bar{v}_1 + a_{22}\,\bar{v}_2 + \ldots + a_{n2}\,\bar{v}_n \\ \vdots \\ f(\bar{u}_m) = a_{1m}\,\bar{v}_1 + a_{2m}\,\bar{v}_2 + \ldots + a_{nm}\,\bar{v}_n \end{array}$$

Matricialmente se escribe:

$$\{\, f(\bar{u}_1) \quad f(\bar{u}_2) \quad \ldots \quad f(\bar{u}_m)\,\} = \{\,\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \ldots \quad \bar{v}_n\,\} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{F_{B_2B_1}},$$

equivalentemente:

$$(f(\bar{u}_j)) = (\bar{v}_i)F_{B_2B_1}.$$

La matriz $F_{B_2B_1}$ se llama: **matriz asociada a la aplicación lineal f con respecto a las bases B_1 y B_2.**

Lo interesante de esta matriz es que nos permite calcular la imagen de cualquier vector matricialmente. Denotamos:

$$\begin{array}{rcl} (x^1, \ldots, x^m) & \rightarrow & \text{coordenadas contravr. de un vector } \bar{x} \in U \text{ en la base } B_1. \\ (y^1, \ldots, y^n) & \rightarrow & \text{coordenadas contravr. de la imagen } f(\bar{x}) \in V \text{ en la base } B_2. \end{array}$$

Entonces:

$$\boxed{\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}} \iff \boxed{(y^i) = F_{B_2B_1}(x^j)}$$

Prueba: Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = f((x^j)(\bar{u}_j)) = f(\bar{u}_j)(x^j) = (\bar{v}_i)F_{B_2B_1}(x^j) \\ f(\bar{x}) = (\bar{v}_i)(y^i) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (y^i) = F_{B_2B_1}(x^j).$$

3 Cambio de base.

Consideramos una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$ entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. Supongamos que tenemos las siguientes bases:

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\} \\ B_1' = \{\bar{u}_1', \ldots, \bar{u}_m'\} \end{array}\right. \text{Bases de } U; \qquad \left.\begin{array}{l} B_2 = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \\ B_2' = \{\bar{v}_1', \ldots, \bar{v}_n'\} \end{array}\right. \text{Bases de } V.$$

A su vez denotaremos las coordenadas de un vector $\bar{x}$ y de su imagen $\bar{y}$ en cada una de las bases de la siguiente forma:

Coordenadas de $\bar{x}$.	Coordenadas de $\bar{y} = f(\bar{x})$.
$(x^1, \dots, x^m)$ respecto a la base B_1	$(y^1, \dots, y^n)$ respecto a la base B_2
$(x'^1, \dots, x'^m)$ respecto a la base B'_1	$(y'^1, \dots, y'^n)$ respecto a la base B'_2

La relación entre las distintas bases y coordenadas utilizando las matrices de cambio de base es la siguiente:

$$\begin{array}{c|c} (\bar{u}') = (\bar{u})M_{B_1B'_1} & (\bar{v}') = (\bar{v})M_{B_2B'_2} \\ (x) = M_{B_1B'_1}(x') & (y) = M_{B_2B'_2}(y') \end{array}$$

Además sabemos que podemos escribir la aplicación f matricialmente bien con respecto a las bases B_1, B_2 ó B'_1, B'_2:

$$(y) = F_{B_2B_1}(x) \;\Big|\; (y') = F_{B'_2B'_1}(x')$$

Veamos como se relacionan las matrices asociadas a f con respecto a las bases B_1, B_2 y B'_1, B'_2:

$$\begin{array}{lll} (y) = F_{B_2B_1}(x) & \Rightarrow & M_{B_2B'_2}(y') = F_{B_2B_1}M_{B_1B'_1}(x') \;\; \Rightarrow \\ & \Rightarrow & (y') = (M_{B_2B'_2})^{-1}F_{B_2B_1}(M_{B_1B'_1})(x') \end{array}$$

y por tanto:

$$F_{B'_2B'_1} = (M_{B_2B'_2})^{-1}F_{B_2B_1}M_{B_1B'_1}, \quad \text{ó} \quad \boxed{F_{B'_2B'_1} = M_{B'_2B_2}F_{B_2B_1}M_{B_1B'_1}}$$

Algunas observaciones interesantes al respecto del cambio de base son:

1. Vemos que las matrices de un homomorfismo con respecto a distintas bases son equivalentes.

2. De nuevo como regla nemotécnica, nos fijamos en que los índices correspondientes a la misma base son adyacentes en la expresión anterior:

$$F_{B'_2B'_1} = M_{B'_2\boxed{B_2}}F_{\boxed{B_2}\boxed{B_1}}M_{\boxed{B_1}B'_1}$$

   Además con esta notación se indica explícitamente la función de cada matriz. Es decir, se quiere hallar $F_{B'_2B'_1}$ que es la matriz que multiplicada por coordenadas en la base B'_1 devuelve su imagen en la base B'_2, en función de la matriz $F_{B_2B_1}$, que es la matriz que multiplicada por coordenadas en la base B_1 devuelve su imagen en la base B_2. Entonces:

   - mediante $M_{B_1B'_1}$ pasamos de coordenadas en la base B'_1 a coordenadas en la base B_1.

   - mediante $F_{B_2B_1}$ pasamos a las coordenadas de la imagen en la base B_2 a partir de las obtenidas en el paso anterior.

   - mediante $M_{B'_2B_2}$ pasamos las coordenadas de la imagen de la base B_2 a la B'_2.

4 Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

Definición 4.1 *Dada una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$ se llama* **núcleo de** f *al conjunto de vectores cuya imagen es el $\bar{0}$:*

$$ker(f) = \{\bar{x} \in U |\, f(\bar{x}) = \bar{0}\}.$$

Proposición 4.2 *El núcleo de una aplicación lineal es un subespacio vectorial del conjunto inicial.*

Prueba: Comprobemos que cumple la definición de subespacio vectorial:

- En primer lugar es no vacío ya que $f(\bar{0}) = \bar{0}$, luego $\bar{0} \in ker(f)$.

- Sean $\bar{x}, \bar{x}' \in ker(f)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y veamos que $\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}' \in ker(f)$:

$$f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}') = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{x}') \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{x}, \bar{x}' \in ker(f)}}{=} \alpha\bar{0} + \beta\bar{0} = \bar{0}.$$

y por tanto efectivamente $\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}' \in ker(f)$. ■

Si tenemos la matriz asociada a la aplicación lineal f con respecto a dos bases B_1 y B_2 respectivamente de U y V, los vectores del núcleo son aquellos cuyas coordenadas con respecto a la base B_1 cumplen la ecuación:

$$F_{B_2B_1}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 4.3 *Dada una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$ se llama* **imagen de** f *al conjunto de vectores imagen por f de algún vector de U:*

$$im(f) = \{\bar{y} \in V \,|\, \bar{y} = f(\bar{x}),\, \bar{x} \in U\}.$$

Proposición 4.4 *La imagen de una aplicación lineal es un subespacio vectorial del conjunto final.*

Prueba: Comprobemos que cumple la definición de subespacio vectorial:

- En primer lugar es no vacío ya que $f(\bar{0}) = \bar{0}$, luego $\bar{0} \in im(f)$.

- Sean $\bar{y}, \bar{y}' \in im(f)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y veamos que $\alpha\bar{y} + \beta\bar{y}' \in im(f)$:

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{y} \in im(f) & \Rightarrow & \bar{y} = f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in U \\ \bar{y}' \in im(f) & \Rightarrow & \bar{y}' = f(\bar{x}'), \quad \bar{x}' \in U \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha\bar{y} + \beta\bar{y}' = f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}')$$

donde $\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}' \in U$. Deducimos que efectivamente $\alpha\bar{y} + \beta\bar{y}' \in im(f)$. ■

Proposición 4.5 *Si $A = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k\}$ es un sistema generador de U, entonces $f(A) = \{f(\bar{a}_1), \ldots, f(\bar{a}_k)\}$ es un sistema generador de $im(f)$.*

Prueba: En primer lugar está claro que $\mathcal{L}(f(A)) \subset imf$, ya que cualquier combinación de elementos de $f(A)$ es imagen de la correspondiente combinación lineal de los elementos de A.

Recíprocamente, sea $\bar{y} \in im(f)$. Entonces existe $\bar{x} \in U$ con $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Además por ser A sistema generador de U:

$$\bar{x} = \alpha^1\bar{a}_1 + \ldots \alpha^k\bar{a}_k.$$

Aplicando f queda:

$$f(\bar{x}) = f(\alpha^1\bar{a}_1 + \ldots \alpha^k\bar{a}_k) \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = f(\bar{x}) = \alpha^1 f(\bar{a}_1) + \ldots \alpha^k f(\bar{a}_k).$$

luego $\bar{y}$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $f(A)$. ■

Como consecuencia de esta proposición, si tenemos dos bases B_1 y B_2 respectivamente de U_1 y U_2, la imagen de f está generada por las imágenes de los vectores de U_1. En particular si $F_{B_2B_1}$ es la matriz asociada a f, **los vectores de la imagen expresados en coordenadas respecto a la base B_2 están generados por las columnas de la matriz $F_{B_2B_1}$**.

Observamos que **estas columnas no tienen por que ser independientes**, ya que como vimos anteriormente, aunque B_1 sea un sistema libre, $f(B_1)$ no tiene por que serlo. Por tanto si queremos una base de la imagen, hemos de eliminar las columnas de $F_{B_2B_1}$ que sean dependientes de los demás.

Teorema 4.6 *Si $f : U \longrightarrow V$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales finitos se verifica:*

$$\boxed{dim(ker(f)) + dim(im(f)) = dim(U)}$$

Prueba: Supongamos que $dim(ker(f)) = k$ y $dim(U) = m$. Sea

$$B_k = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k\}$$

una base del núcleo de f. Podemos completar esta base hasta una de U:

$$B_1 = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}, \ldots, \bar{u}_m\}$$

Ahora sabemos que $im(f)$ está generada por $f(B_1)$:

$$Im(f) = \mathcal{L}\{f(\bar{u}_1), \ldots, f(\bar{u}_k), f(\bar{u}_{k+1}), \ldots, f(\bar{u}_m)\} = \mathcal{L}\{f(\bar{u}_{k+1}), \ldots, f(\bar{u}_m)\}$$

ya que por estar en el núcleo $f(\bar{u}_1) = \ldots = f(\bar{u}_k) = \bar{0}$.

Tenemos que $\{f(\bar{u}_{k+1}), \ldots, f(\bar{u}_m)\}$ es un sistema generador de $im(f)$. Veamos que además es un sistema libre. Supongamos que:

$$\alpha^{k+1} f(\bar{u}_{k+1}) + \ldots + \alpha^m f(\bar{u}_m) = \bar{0}.$$

Entonces:

$$f(\alpha^{k+1}\bar{u}_{k+1} + \ldots + \alpha^m\bar{u}_m) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha^{k+1}\bar{u}_{k+1} + \ldots + \alpha^m\bar{u}_m \in ker(f).$$

Utilizamos que B es una base de $ker(f)$:

$$\alpha^{k+1}\bar{u}_{k+1} + \ldots + \alpha^m\bar{u}_m = \alpha^1\bar{u}_1 + \ldots + \alpha^k\bar{u}_k$$

y pasando todo a un lado:

$$\alpha^1\bar{u}_1 + \ldots + \alpha^k\bar{u}_k - \alpha^{k+1}\bar{u}_{k+1} - \ldots - \alpha^m\bar{u}_m = \bar{0}$$

Como los vectores de B' son base, en particular son independientes. Deducimos que $\alpha^{k+1} = \ldots = \alpha^m = 0$ y tenemos la independencia lineal buscada.

En definitiva hemos probado que $\{f(\bar{u}_{k+1}), \ldots, f(\bar{u}_m)\}$ es un sistema libre y generador de $im(f)$, es decir, una base. Así:

$$dim(im(f)) = m - (k+1) + 1 = m - k = dim(U) - dim(ker(f)).$$

5 Matriz asociada a la aplicación proyección sobre un espacio paralelamente a otro.

Vimos que dados dos subespacios vectoriales S_1, S_2 suplmenentarios, todo vector $\bar{x} \in V$ se descompone de manera única como $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, con $\bar{x}_1 \in S_1$ y $\bar{x}_2 \in S_2$.

Esto nos permitía definir la aplicación proyección sobre S_1 pasalelamente a S_2:

$$p_1 : V \longrightarrow V, \qquad p_1(\bar{x}) = \bar{x}_1 \text{ si } \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \text{ con } \bar{x}_1 \in S_1 \text{ y } \bar{x}_2 \in S_2$$

Los pasos para calcular la matriz asociada a tal aplicación en una base C (que será normalmente la base canónica) son:

1. Hallar bases $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ y $\{v_1, v_2 \dots, v_l\}$ respectivamente de los subespacios S_1 y S_2, epxresando sus vectores en coordenadas respecto a la base C.
2. Con las bases anteriores formar una base del espacio V (el hecho de que sean suplementarios nos garantiza que su unión es una base del espacio total):
$$B = \{\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_k}_{S_1}, \underbrace{v_1, v_2 \dots, v_l}_{S_2}\}.$$
3. En la base B anterior la matriz asociada es una matriz diagonal, con tantos unos en la diagonal como la dimensión k de S_1 y tantos ceros como la dimensión l de S_2.
$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{dim(S_1)=k} & & & & \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{dim(S_2)=l} & & & \end{pmatrix}.$$
La matriz P_B tiene esta forma porque los vectores de S_1 al ser proyectados sobre S_1 quedan invariantes; por el contrario los vectores S_2 al ser proyectados paralelamente a ese mismo subespacio tienen por imagen el vector nulo.
4. Finalmente hacemos un cambio de base para expresar la matriz asociada en la base de partida C:
$$P_C = M_{CB} P_B M_{BC} = M_{CB} P_M M_{CB}^{-1}.$$

6 Composición de homomorfismos.

Proposición 6.1 *Sean $f : U \longrightarrow V$ y $g : V \longrightarrow W$ dos aplicaciones lineales. Entonces la aplicación composición $g \circ f$ también es una aplicación lineal.*

Prueba: Sea $\bar{x}, \bar{x}' \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Se tiene:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}') &= g(f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}')) = \qquad \text{(linealidad de } f) \\ &= g(\alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{x}')) = \qquad \text{(linealidad de } g) \\ &= \alpha g(f(\bar{x})) + \beta g(f(\bar{x}')) = \alpha(g \circ f)(\bar{x}) + \beta(g \circ f)(\bar{x}'). \end{aligned}$$

■

Si tenemos bases en cada uno de los espacios vectoriales U, V y W:

$$B_1 = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}, \qquad B_2 = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}, \qquad B_3 = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_p\}.$$

y llamamos $h = g \circ f$ a la composición, podemos ver como se relacionan las matrices $F_{B_2B_1}$, $G_{B_3B_2}$ y $H_{B_3B_1}$. Si denotamos a las coordenadas de los vectores $\bar{x}$, $\bar{y} = f(\bar{x})$, $\bar{z} = h(\bar{x}) = g(\bar{y})$, por (x), (y), (z) con respecto a las bases B_1, B_2 y B_3 respectivamente, sabemos que:

$$(y) = F_{B_2B_1}(x); \qquad (z) = G_{B_3B_2}(y); \qquad (z) = H_{B_3B_1}(x)$$

Por tanto:

$$(z) = G_{B_3B_2}(y) = G_{B_3B_2}F_{B_2B_1}(x)$$

y deducimos que:

$$\boxed{\text{Si } h = g \circ f, \qquad H_{B_3B_1} = G_{B_3B_2}F_{B_2B_1}.}$$

7 Clasificación de homomorfismos.

7.1 Monomorfismos.

Definición 7.1 *Un* **monomorfismo** *es una aplicación lineal inyectiva.*

Algunas propiedades interesantes de los monomorfismos son:

1. *Una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$ es inyectiva $\iff$ $ker(f) = \{\bar{0}\}$.*

   Prueba:

   $\Longrightarrow$: Supongamos que $f : U \longrightarrow W$ es una aplicación lineal inyectiva. Entonces:

   $$\bar{x} \in ker(f) \;\Rightarrow\; f(\bar{x}) = \bar{0} \;\Rightarrow\; f(\bar{x}) = f(\bar{0}) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ inyectiva}}}{\Rightarrow} \bar{x} = \bar{0}.$$

   y por tanto $ker(f) = \{\bar{0}\}$.

   $\Longleftarrow$: Supongamos que $ker(f) = \{\bar{0}\}$. Entonces:

   $$\begin{array}{lllllll} f(\bar{x}) = f(\bar{x}') & \Rightarrow & f(\bar{x}) - f(\bar{x}') = \bar{0} & \Rightarrow & f(\bar{x} - \bar{x}') = \bar{0} & \Rightarrow & \\ & \Rightarrow & \bar{x} - \bar{x}' \in ker(f) & \Rightarrow & \bar{x} - \bar{x}' = \bar{0} & \Rightarrow & \bar{x} = \bar{x}' \end{array}$$

   y por tanto f es inyectiva.

2. *Si $f : U \longrightarrow V$ es un monomorfismo entre espacios vectoriales de dimensión finita entonces $dim(U) \leq dim(V)$.*

   Prueba: Basta tener en cuenta que $im(f) \subset V$ y además por ser f inyectiva $ker(f) = \{\bar{0}\}$. Entonces:

   $$dim(U) = dim(im(f)) + dim(ker(f)) = dim(im(f)) \leq dim(V).$$

7.2 Epimorfismos.

Definición 7.2 *Un* **epimorfismo** *es una aplicación lineal sobreyectiva.*

Algunas propiedades interesantes de los epimorfismos son:

1. *Si $f : U \longrightarrow V$ es un epimorfismo entre espacios vectoriales de dimensión finita entonces $dim(U) \geq dim(V)$.*

   Prueba: Basta tener en cuenta que por ser epimorfismo $im(f) = V$ y entonces:
   $$dim(U) = dim(im(f)) + dim(ker(f)) \geq dim(im(f)) = dim(V).$$

7.3 Isomorfismos.

Definición 7.3 *Un* **isomorfismo** *es una aplicación lineal biyectiva.*

Algunas propiedades interesantes de los isomorfismos son:

1. *Si f es una aplicación lineal, f es biyectiva $\iff$ $ker(f) = \bar{0}$ y $im(f) = U$.*

   Prueba: Basta tener en cuenta que:

   - f biyectiva $\iff$ f inyectiva y sobreyectiva $\iff$ $ker(f) = \bar{0}$ y $im(f) = U$.

2. *Si $f : U \longrightarrow V$ es un isomorfismo, la aplicación inversa $f^{-1} : V \longrightarrow U$ es un isomorfismo.*

   Prueba: Por ser f biyectiva sabemos que existe inversa f^{-1} y que es también biyectiva. Resta probar que f^{-1} es lineal.

   Sean $\bar{y}, \bar{y}' \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Supongamos que $f^{-1}(\bar{y}) = \bar{x}$ e $f^{-1}(\bar{y}') = \bar{x}'$. Entonces:
   $$\begin{array}{rcl} f^{-1}(\bar{y}) = \bar{x} & \Rightarrow & f(\bar{x}) = \bar{y} \\ f^{-1}(\bar{y}') = \bar{x}' & \Rightarrow & f(\bar{x}') = \bar{y}' \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{x}') = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{x}') = \alpha\bar{y} + \beta\bar{y}'.$$

   Por tanto:
   $$f^{-1}(\alpha\bar{y} + \beta\bar{y}') = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}' = \alpha f^{-1}(\bar{y}) + \beta f^{-1}(\bar{y}').$$

3. *La composición de isomorfismos es un isomorfismo.*

   Basta tener en cuenta que la composición de aplicaciones lineales es una aplicación lineal y que la de aplicaciones biyectivas es una aplicación biyectiva.

4. *Entre dos espacios vectoriales de igual dimensión siempre existe un isomorfismo.*

   Prueba: Podemos comprobarlo de dos formas:

   - Vimos que cualquier espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Luego dos espacios de igual dimensión son isomorfos entre si.

   - Directamente, si U y V son dos espacios vectoriales n-dimensionales y tenemos bases:
   $$B_1 = \{\bar{u}_1, \ldots, u_n\}; \qquad B_2 = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$$

   Podemos definir la aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$ como aquella que sobre la base B_1 actúa:
   $$f(\bar{u}_1) = \bar{v}_1; \quad \ldots \quad f(\bar{u}_n) = \bar{v}_n;$$

   La matriz asociada a f respecto a las bases B_1 y B_2, es $F_{B_2B_1} = Id$. Por tanto esta aplicación tiene inversa, cuya matriz asociada es $F'_{B_1B_2} = (F_{B_2B_1})^{-1} = Id$. Una aplicación con inversa es biyectiva.

5. *Si entre* U *y* V *existe un isomorfismo* $f : U \longrightarrow V$ *entonces* $dim(U) = dim(V)$.

   Prueba: Por ser f inyectiva vimos que $dim(U) \leq dim(V)$. Por ser f sobreyectiva $dim(U) \geq dim(V)$. Combinando ambos factores obtenemos la igualdad entre las dimensiones.

7.4 Endomorfismos.

Definición 7.4 *Un* **endomorfismo** *es una aplicación lineal donde el espacio inicial y final coinciden:*

$$f : U \longrightarrow U.$$

Definición 7.5 *Un* **automorfismo** *es una endomorfismo biyectivo.*

En el capítulo siguiente estudiaremos en detalle los endomorfismos de espacios vectoriales finitos.

8 Espacio vectorial de los homomorfismos.

Dados dos espacios vectoriales U, V denotamos por $Hom(U, V)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales de U en V. Este conjunto tiene dos operaciones, la suma de funciones (interna) y el producto por un escalar (externa):

- La suma de aplicaciones lineales se define como:

$$(f + g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) + g(\bar{x}), \qquad \forall f, g \in Hom(U, V), \quad \forall \bar{x} \in U.$$

- El producto de una aplicación lineal por un escalar se define como:

$$(\lambda f)(\bar{x}) = \lambda f(\bar{x}), \qquad \forall f \in Hom(U, V), \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \bar{x} \in U.$$

Es fácil ver con estas operaciones $Hom(U, V)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Proposición 8.1 *Si* U, V *son espacios vectoriales de dimensiones* m *y* n *respectivamente,* $Hom(U, V)$ *es un espacio vectorial de dimensión* $n \cdot m$.

Prueba: Fijamos dos bases B_1 y B_2 respectivamente de U y V:

$$B_1 = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\}; \qquad B_2 = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_2\}.$$

Definimos la siguientes aplicación entre los espacios vectoriales $Hom(U, V)$ Y $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$:

$$\begin{array}{rccc} \pi: & Hom(V,U) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \\ & f & \longrightarrow & F_{B_2B_1} \end{array}$$

que lleva una aplicación lineal de $Hom(U, V)$ en su matriz asociada con respecto a las bases fijas.

La aplicación π verifica:

- *Es lineal.* Ya que:

$$\pi(\alpha f + \beta g) = \alpha F_{B_2 B_1} + \beta G_{B_2 B_1} = \alpha\pi(f) + \beta\pi(g)$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $f, g \in Hom(U, V)$.

- *Es inyectiva.* Ya que:

$$f \in ker(\pi) \quad \Rightarrow \quad F_{B_2 B_1} = \Omega \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

- *Es sobreyectiva.* Porque dada una matriz $F \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ siempre podemos definir una aplicación lineal de U en V cuya matriz asociada con respecto a B_1 y B_2 sea f. Basta tomar:

$$f(x^j) = (\bar{v}_i)F(x^j),$$

donde (x^j) son las coordenadas de cualquier vector de U respecto de la base B_1.

Por tanto π es un isomorfismo y

$$dim(Hom(V, U)) = dim(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) = n \cdot m.$$

8.1 Espacio dual.

Como caso particular de espacio vectorial de homomorfismos, definimos:

Definición 8.2 *Dado un espacio vectorial U sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, se llama* **espacio dual de** *U y se denota por U^* al espacio vectorial $Hom(U, \mathbb{K})$.*

Los elementos de U^* son aplicaciones lineales:

$$f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

y suelen llamarse **formas lineales** *o* **covectores.**

Se verifica que $dim(U^*) = dim(U)$.

Más adelante estudiaremos con más detalle el espacio vectorial dual de uno dado.