2. Sistemas generadores. Sistemas libres. Bases.

1 Combinación lineal de vectores.

1.1 Combinación lineal.

Definición 1.1 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se llama* **combinación lineal** *de una familia de vectores $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ a cualquier vector de la forma:*

$$\bar{y} = \alpha^1\bar{x}_1 + \ldots + \alpha^n\bar{x}_n, \qquad con \qquad \alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{K}.$$

1.2 Envolvente lineal.

Definición 1.2 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Dado un subconjunto $A \subset V$ se llama* **envolvente lineal generada por** *A al conjunto de vectores que se pueden poner como combinación lineal de elementos de A:*

$$\mathcal{L}\{A\} = \{\sum \alpha^i\bar{x}_i |\, \alpha^i \in \mathbb{K},\, \bar{x}_i \in A\}$$

Al conjunto A se le llama **sistema generador** *de $\mathcal{L}\{A\}$. Si $\mathcal{L}\{A\} = V$ el conjunto A se llama simplemente un* **sistema generador** *del espacio vectorial.*

Veamos una caracterización de la envolvente lineal:

Proposición 1.3 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y A un subconjunto de V. La envolvente lineal de A es el menor subespacio vectorial que contiene a A.*

Prueba: En primer lugar, razonemos que $\mathcal{L}\{A\}$ es un subespacio vectorial. Basta tener en cuenta que $\bar{0} \in \mathcal{L}\{A\}$ y si $\bar{x}, \bar{y}$ son combinaciones de elementos de A, entonces $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ es combinación de elementos de A para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Por otra parte, es claro que $A \subset \mathcal{L}\{A\}$.

Finalmente, veamos que si S es cualquier otro subespacio vectorial conteniendo a A, entonces $\mathcal{L}\{A\} \subset S$. Si $\bar{v} \in \mathcal{L}\{A\}$:

$$\bar{v} = \lambda^1\bar{a}_1 + \ldots + \lambda^n\bar{a}_n \qquad \text{con} \qquad \bar{a}_i \in A \subset S.$$

Pero por ser S subespacio vectorial, la combinación lineal de vectores de S sigue perteneciendo a S. Por tanto $\bar{v} \in S$. ■

Como consecuencia de la defición y esta proposición deducimos algunas propiedades:

1. $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{A\} \subset \mathcal{L}\{B\}$.
2. $\bar{x} \in \mathcal{L}\{A\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{A \cup \{\bar{x}\}\} = \mathcal{L}\{A\}$.

   Prueba: Basta tener en cuenta que

   $$A \subset A \cup \{\bar{x}\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{A\} \subset \mathcal{L}\{A \cup \{\bar{x}\}\},$$

   y que $\mathcal{L}\{A\}$ es un subespacio vectorial que contiene a $A \cup \{\bar{x}\}$.

3. $\mathcal{L}\{\mathcal{L}\{A\}\} = \mathcal{L}\{A\}$.

   Prueba: Ya que $\mathcal{L}\{A\}$ es el menor subespacio vectorial que contiene a $\mathcal{L}\{A\}$.

4. *Todo subespacio vectorial es una envolvente lineal.*

   Prueba: Ya que si S es un subespacio vectorial, $\mathcal{L}\{S\} = S$.

1.3 Sistemas equivalentes.

Definición 1.4 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que dos conjuntos de vectores son* **sistemas equivalentes** *si generan el mismo subespacio vectorial:*

$$A, B \text{ equivalentes} \iff \mathcal{L}\{A\} = \mathcal{L}\{B\}.$$

Proposición 1.5 *Dos sistemas A y B son equivalentes si y sólo si $A \subset \mathcal{L}\{B\}$ y $B \subset \mathcal{L}\{A\}$.*

Prueba:

$\Longrightarrow$:

Si A, B son equivalentes, $\mathcal{L}\{A\} = \mathcal{L}\{B\}$ y está claro que $A \subset \mathcal{L}\{B\}$ y $B \subset \mathcal{L}\{A\}$.

$\Longleftarrow$:

Supongamos que $A \subset \mathcal{L}\{B\}$ y $B \subset \mathcal{L}\{A\}$. Entonces:

$$\begin{array}{lcl} A \subset \mathcal{L}\{B\} & \Rightarrow & \mathcal{L}\{A\} \subset \mathcal{L}\{\mathcal{L}\{B\}\} = \mathcal{L}\{B\}. \\ B \subset \mathcal{L}\{A\} & \Rightarrow & \mathcal{L}\{B\} \subset \mathcal{L}\{\mathcal{L}\{A\}\} = \mathcal{L}\{A\}. \end{array}$$

2 Dependencia e independencia lineal de vectores.

Definición 2.1 *Se dice que un sistema de vectores $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ es* **linealmente independiente** *o* **un sistema libre** *si verifica:*

$$\alpha^1 \bar{x}_1 + \ldots + \alpha^n \bar{x}_n = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha^1 = \ldots = \alpha^n = 0.$$

Diremos que son **linealmente dependientes** *o* **un sistema ligado** *cuando no son independientes.*

Proposición 2.2 *Un sistema de vectores $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores es combinación lineal de los demás.*

Prueba:

$\Longrightarrow$:

Supongamos que son dependientes. Entonces existe una combinación lineal

$$\alpha^1 \bar{x}_1 + \ldots + \alpha^n \bar{x}_n = \bar{0}$$

con algún $\alpha^{i_0} \neq 0$. La expresión anterior puede escribirse como:

$$\bar{x}_{i_0} = \underbrace{\frac{\alpha^1}{\alpha^{i_0}} \bar{x}_1 + \ldots + \frac{\alpha^n}{\alpha^{i_0}} \bar{x}_n}_{\text{no aparece el término } i_0}$$

y vemos que $\bar{x}_{i_0}$ es combinación lineal de los demás.

$\Longleftarrow$. Supongamos que hay un término $\bar{x}_{i_0}$ combinación lineal de los demás. Entonces:

$$\bar{x}_{i_0} = \underbrace{\alpha^1\bar{x}_1 + \ldots + \alpha^n\bar{x}_n}_{\text{no aparece el término } i_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha^1\bar{x}_1 + \ldots + \alpha^{i_0}\bar{x}_{i_0} + \ldots + \bar{\alpha}^n\bar{x}_n = \bar{0}$$

con $\alpha^{i_0} = -1 \neq 0$ y por tanto $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ son linealmente dependientes. ■

Observación 2.3 *De la definición y la proposición anteriores se deduce:*

1. *Cualquier sistema que contiene al vector $\bar{0}$ es ligado.*
2. *El conjunto vacío se considera independiente.*
3. *Si a un sistema linealmente independiente le suprimimos un vector, el sistema que obtenemos sigue siendo libre.*
4. *Si a un sistema libre le añadimos un vector que no sea combinación lineal de los vectores del sistema, el nuevo sistema también es libre.*

   Prueba: Supongamos que el sistema inicial libre es $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ y le añadimos el vector $\bar{x}$. Si ahora el nuevo sistema es ligado, se verifica:

   $$\lambda\bar{x} + \lambda^1\bar{x}_1 + \ldots + \lambda^n\bar{x}_n = 0$$

   con algún λ o λ^i no nulo. Como el sistema incial es libre, necesariamente $\lambda \neq 0$. Obtenemos:

   $$\bar{x} = -\frac{\lambda^1}{\lambda}\bar{x}_1 - \ldots - \frac{\lambda^n}{\lambda}\bar{x}_n$$

   y por tanto $\bar{x}$ sería combinación lineal del sistema incial.

5. *Si a un sistema ligado le añadimos un vector, el nuevo sistema sigue siendo ligado.*
6. ***Si A es un conjunto de vectores infinito, decimos que es libre cuando todos los subconjuntos finitos son libres y ligado cuando existe un subsistema ligado.***

3 Bases, dimensión y coordenadas.

3.1 Bases y dimensión.

Definición 3.1 *Dado un espacio vectorial V, un conjunto ordenado de vectores $B = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ se dice que es una* **base** *si es un sistema libre y genera todo V.*

Observación 3.2 *En realidad no es necesario que haya un número finito de vectores para que formen una base. Sin embargo a lo largo de toda la asignatura tan sólo trabajaremos con bases finitas de espacios vectoriales.*

Proposición 3.3 *Sea V un espacio vectorial, si $A = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ es un sistema generador de V, entonces A contiene una base de V.*

Prueba: Si A es un sistema libre ya está probado.

Si no lo es existe un vector $\bar{x}_{i_0}$ combinación lineal de los demás. Entonces:

$$\bar{x}_{i_0} \in \mathcal{L}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i_0-1}, \bar{x}_{i_o+1}, \ldots, \bar{x}_n\}$$

y por las propiedades de la envolvente lineal:

$$\mathcal{L}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i_0-1}, \bar{x}_{i_o+1}, \ldots, \bar{x}_n\} = \mathcal{L}\{A\}$$

Ahora tenemos que el sistema $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i_0-1}, \bar{x}_{i_o+1}, \ldots, \bar{x}_n\}$ es generador de V. Si es además libre, hemos terminado. En otro caso, volvemos a razonar como antes obteniendo un nuevo subsistema generador con un vector menos. Como hay un número finito de vectores el proceso terminará y obtendremos la base buscada. ■

Observación 3.4 *Este resultado también es cierto si A es un conjunto infinito, pero la prueba es más delicalda.*

Teorema 3.5 (Teorema de Steinitz) *Sea V un espacio vectorial. Sea un sistema libre $A = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m\}$ y una base $B = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n\}$. Entonces $m \leq n$ y existen m vectores de B que pueden ser sustituidos por los de A.*

Prueba: Si $A = \emptyset$ el resultado es trivial. Supongamos que $A \neq \emptyset$. Como A es un sistema libre todos los vectores de A son no nulos. Entonces por ser B una base:

$$\bar{a}_1 = \alpha^1 \bar{b}_1 + \ldots + \alpha^n \bar{b}_n, \text{ con } \alpha^i \in \mathbb{K}, \text{ y algún } \alpha^{i_0} \neq 0$$

Por comodidad supondremos $i_0 = 1$. Entonces:

$$\bar{b}_1 = \frac{1}{\alpha^1}\bar{a}_1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^1}\bar{b}_2 + \ldots + \frac{\alpha^n}{\alpha^1}\bar{b}_n$$

Utilizando la proposición 1.5, vemos que los sistemas $\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n\}$ y $\{\bar{a}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ son equivalentes y por tanto

$$\mathcal{L}\{\bar{a}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\} = \mathcal{L}\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n\} = V$$

Además $\bar{a}_1$ no puede ser combinación lineal de $\bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$ porque entonces también lo sería $\bar{b}_1$ y B no sería un sistema libre. Teniendo en cuenta las propiedades de la independencia lineal deducimos $\{\bar{a}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ es una base de V.

Si $m = 1$ hemos terminado. Si no repetimos el proceso. Ahora tenemos que:

$$\bar{a}_2 = \beta^1 \bar{a}_1 + \beta^2 \bar{b}_2 \ldots + \alpha^n \bar{b}_n, \text{ con } \beta^i \in \mathbb{K}, \text{ y algún } \beta^{i_0} \neq 0$$

con $i_0 > 1$ por ser A un sistema libre. Suponemos $\beta^2 \neq 0$ y repetimos el proceso anterior.

Obtendremos que $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_3, \ldots, \bar{b}_n\}$ es una base de V.

Repetimos este proceso hasta terminar con los m vectores de A. Observamos que no puede ocurrir que $m > n$. Ya que en el paso n-ésimo obtendríamos que A es una base de V, y por tanto a_{n+1} sería combinación lineal de otros elementos de A, contradiciendo la hipótesis de que es un sistema libre. ■

Este Teorema tiene consecuencias muy importantes:

1. **Todas las bases de un espacio vectorial con un sistema de generadores finito tienen el mismo número de elementos.**

   Prueba: Dadas dos bases finitas B y B', con m y n vectores respectivamente podemos aplicar el Teorema de Steinitz de dos formas. Tomando como B el sistema libre y B' la base, obtenemos $m \leq n$; tomando como B' el sistema libre y B la base, obtenemos $n \leq m$. Deducimos que $n = m$.

2. Un espacio vectorial con un sistema de generadores finito se dice que es de dimensión finita:

   Al número de elementos de una base de un espacio vectorial se le llama dimensión del espacio vectorial.

3. Un espacio vectorial para el cual no existen sistemas generadores finitos se dice de dimensión infinita.

4. Cualquier sistema libre A puede completarse a una base, escogiendo vectores adecuados de una base cualquiera B.

5. **Un sistema libre de n vectores en un espacio vectorial de dimensión n es una base.**

6. **Un sistema generador de n vectores en un espacio vectorial de dimensión n es una base.**

3.2 Coordenadas contravariantes.

Definición 3.6 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $B = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ una base. Dado un vector $\bar{x} \in V$ llamamos* **coordenadas contravariantes de $\bar{x}$ en la base** *B a los escalares $(x^1, \ldots, x^n)$ que verifican:*

$$\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + \ldots + x^n\bar{e}_n.$$

Veamos que esta definición tiene sentido.

En primer lugar por ser B base, es un sistema generador y por tanto todo vector de V pude ponerse como combinación lineal de los elementos de B. Sabemos por tanto que dado un vector $\bar{x} \in V$, existirán los escalares $(x^1, \ldots, x^n)$ verificando la condición pedida.

Por otra parte veamos que las **coordenadas contravariantes de un vector respecto a una base son únicas**. Si existen escalares $(x^1, \ldots, x^n)$ e $(y^1, \ldots, y^n)$, verificando la condición pedida se tendría:

$$x^1\bar{e}_1 + \ldots + x^n\bar{e}_n = \bar{x} = y^1\bar{e}_1 + \ldots + y^n\bar{e}_n \quad \Rightarrow \quad (x^1 - y^1)\bar{e}_1 + \ldots + (x^n - y^n)\bar{e}_n = 0.$$

Por ser B una base sus vectores son linealmente independientes y deducimos que:

$$x^1 = y^1, \quad \ldots, \quad x^n = y^n \qquad \Rightarrow \quad (x^1, \ldots, x^n) = (y^1, \ldots, y^n).$$

Es importante señalar que las coordenadas contravariantes de un vector dependen del orden de los vectores de la base.

3.3 Isomorfismo entre $\mathbb{K}^n$ y espacios vectoriales de dimensión n.

La principal ventaja de poder introducir bases y coordenadas en espacios vectoriales es la siguiente.

Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ y una base $B = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, podemos definir la siguiente aplicación biyectiva, que lleva un vector en sus coordenadas:

$$\begin{array}{ccll} V & \longrightarrow & \mathbb{K}^n & \\ \bar{x} & \longrightarrow & (x^1, x^2, \ldots, x^n) & \qquad \text{donde } \bar{x} = x^1\bar{e}_1 + \ldots + x^n\bar{e}_n. \end{array}$$

Está bien definida porque hemos visto que todo vector de V se expresa de manera única como combinación lineal de los elementos de una base.

Es inyectiva, ya que:

$$(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (y^1, y^2, \ldots, y^n) \quad \Rightarrow \quad x^1\bar{e}_1 + \ldots + x^n\bar{e}_n = y^1\bar{e}_1 + \ldots + y^n\bar{e}_n.$$

Es sobreyectiva, porque dado $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{K}^n$ existe $\bar{x} \in V$ con

$$\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + \ldots + x^n\bar{e}_n.$$

Además está biyección respeta las operaciones de V y $\mathbb{K}^n$, es decir:

- coordenadas de $(\bar{x} + \bar{y})$ =coordenadas de $\bar{x}$+coordenadas de $\bar{y}$.

- coordenadas de $\lambda\bar{x} = \lambda\cdot$ coordenadas de $\bar{x}$.

Esto quiere decir que **una vez que introducimos una base, trabajar en un espacio vectorial V de dimensión n cualquiera es equivalente** (en cuanto a las propiedades que se derivan de su estructura de espacio vectorial) **a trabajar en el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$.**

3.4 Bases canónicas.

Las **bases canónicas** son las bases más sencillas o más "naturales" de algunos espacios vectoriales. Citamos algunas de las más usuales:

1. En $\mathbb{K}^n$ la base canónica es

$$\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}.$$

Estos vectores suelen denotarse respectivamente por $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_3\}$.

2. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ de grado menor o igual que n, la base canónica es $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

3. En el espacio vectorial de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la base canónica está formada por todas las matrices que tiene un elemento igual a 1 y el resto nulos. Suelen ordenarse de menor a mayor respecto primero la fila y luego a la columna que ocupa el elemento no nulo. Por ejemplo en $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$, la base canónica es:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

4. En el espacio vectorial de matrices simétricas $\mathcal{S}_{n\times n}(\mathbb{K})$ la base canónica está formada por matrices simétricas que tienen un elemento igual a 1 en la diagonal y cero en el resto; o bien dos elementos iguales a 1 en posiciones simétricas respecto a la diagonal y cero en el resto. Se ordenan siguiendo el mismo criterio que antes, para la fila y columna del elemento igual a 1 situado en la zona triangular superior de la matriz. Por ejemplo en $\mathcal{S}_{n\times n}(\mathbb{K})$ la base canónica es:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

4 Rango de un conjunto de vectores.

Definición 4.1 *Sea V un espacio vectorial y $A = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m\}$ un conjunto de vectores de V. El* **rango de** *A es la dimensión del subespacio que genera A o, equivalentemente, el número de vectores independientes de A.*

Teorema 4.2 *Sea V un espacio vectorial, $A = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m\}$ un conjunto de vectores de V y $B = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ una base de V. Supongamos que las coordenadas del vector $\bar{x}_i$ son $(\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^n)$. Consideramos la matriz M formada por estas coordenadas:*

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \ldots & \lambda_m^1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_m^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \ldots & \lambda_m^n \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \ldots & \bar{x}_m \end{array} \end{array}$$

entonces

$$rango(A) = rango(M).$$

Prueba: Recordemos que el rango de M es el mayor orden de los menores de A distintos de 0. Además el rango de una matriz no se modifica si hacemos operaciones elementales columna. Por otra parte por las propiedades de la envolcente lineal de un conjunto de vectores, si substituimos un vector de A por el propio vector sumado a una combinación de los demás, o bien lo multiplicamos por un escalar o los cambiamos de orden, el espacio que generan no varía.

De esta forma podemos hacer operaciones elementales columna sobre M hasta obtener una forma reducida M'. Las columnas de M' corresponden a las coordenadas respecto a la base B de m vectores $A' = \{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m\}$ que son un sistema equivalente a A. Por tanto:

$$rango(A) = rango(A'), \qquad rango(M) = rango(M').$$

Pero ahora sabemos que el rango de M' es el número de columnas no nulas de la matriz; por otra parte los vectores de A' no nulos son linealmente independientes, ya que en otro caso, uno de ellos sería combinación lineal de los demás y podríamos hacer operaciones columna en M' para conseguir otra fila nula. Pero M' ya es la forma reducida. En consecuencia:

$$rg(A') = \text{n}^{\text{o}}\text{vectores no nulos de } A' = \text{n}^{\text{o}}\text{columnas no nulas de } M' = rg(M').$$

■

Corolario 4.3 *El determinante de una matriz cuadrada T es nulo si y sólo si una columna es combinación lineal de las demás.*

Prueba Supongamos que $T \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Sus columnas pueden considerarse como las coordenadas de n vectores $A = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ respecto a la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

Supongamos que $det(T) = 0$. Entonces $rg(T) < n$ y por tanto $rg(A) < n$. Esto quiere decir que los n vectores de A no son una base y por tanto uno de ellos es combinación lineal de los demás. Por tanto la correspondiente columna de coordenadas será combinación lineal de las demás columnas.

Recíprocamente si una columna es combinación lineal de los demas $rg(A) < n$ y por tanto $rg(T) < n$. Pero entonces no puede haber un menor de orden n con determinante no nulo y por tanto $det(T) = 0$. ■

5 Cambios de base.

Supongamos que tenemos en un espacio vectorial V dos bases:

$$B = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}; \quad B' = \{\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n\}.$$

Se trata de buscar la relación entre las coordenadas contravariantes de un vector respecto a ambas bases.

Como B es una base, los vectores de B' podrán expresarse en coordenadas con respecto a la base B:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{e'}_1 = c_1^1\bar{e}_1 + c_1^2\bar{e}_2 + \ldots + c_1^n\bar{e}_n \\ \bar{e'}_2 = c_2^1\bar{e}_1 + c_2^2\bar{e}_2 + \ldots + c_2^n\bar{e}_n \\ \vdots \\ \bar{e'}_n = c_n^1\bar{e}_1 + c_n^2\bar{e}_2 + \ldots + c_n^n\bar{e}_n \end{array}\right\} \iff$$

$$\begin{pmatrix} \bar{e'}_1 & \bar{e'}_2 & \ldots & \bar{e'}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \ldots & \bar{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \ldots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \ldots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & c_2^n & \ldots & c_n^n \end{pmatrix}$$

La expresión anterior la escribimos simplificadamente como:

$$(\bar{e'}) = (\bar{e})M_{BB'}$$

donde a la matriz

$$M_{BB'} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \ldots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \ldots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & c_2^n & \ldots & c_n^n \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \bar{e'}_1 & \bar{e'}_2 & \ldots & \bar{e'}_n \end{array} \end{array}$$

le llamaremos **matriz de cambio de base o matriz de paso de la base B' a la base B**. Observamos que **sus columnas están formadas por las coordenadas de los vectores de la base B' con respecto a la base B**.

Hay que señalar que **una matriz de cambio de base es siempre no singular**. Esto es consecuencia directa del Corolario 4.3 visto en la sección anterior. Si la matriz fuese singular, los vectores de B' no serían independientes.

Supongamos que las coordenadas de un vector $\bar{x}$ con respecto a las bases B y B' son respectivamente:

$$(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{y} \quad ({x'}_1, \ldots, {x'}_n).$$

Entonces:

$$x_1 \cdot \bar{e}_1 + \ldots + x_n \cdot \bar{e}_n = \bar{x} = {x'}_1 \cdot \bar{e'}_1 + \ldots + {x'}_n \cdot \bar{e'}_n.$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \ldots & \bar{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e'}_1 & \bar{e'}_2 & \ldots & \bar{e'}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {x'}_1 \\ {x'}_2 \\ \vdots \\ {x'}_n \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad (\bar{e})(x) = (\bar{e'})(x').$$

Si aplicamos ahora la expresión de cambio de base queda:

$$(\bar{e})(x) = (\bar{e})M_{BB'}(x'),$$

y teniendo en cuenta la unicidad de las coordenadas respecto a la base B:

$$\boxed{(x) = M_{BB'}(x')}$$

Conviene tener en cuenta los siguientes hechos sobre la notación utilizada:

1. La matriz $M_{BB'}$ es aquella cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base B' con respecto a la base B.

2. La matriz $M_{BB'}$ nos permite pasar de coordenadas en la base B' a coordenadas en la base B.

3. Como regla nemotécnica para recordar la fórmula de cambio de base nos fijamos en que el vector de coordenadas columna que multiplica a la matriz de cambio de base tiene que estar en la base que indica el subíndice de M que es adyacente:

$$(x) = M_{B\boxed{B'}}\boxed{(x')}$$

4. La matriz $M_{B'B}$ estará formada por las coordenadas de los vectores de la base B con respecto a la base B'.

5. La matriz $M_{B'B}$ nos permitirá pasar de coordenadas en la base B a coordenadas en la base B':

$$\boxed{(x') = M_{B'B}(x)}$$

6. Se verifica que:

$$\boxed{M_{B'B} = (M_{BB'})^{-1}}$$

Para comprobar esto basta tener en cuenta que si cambiamos primero de la base B a la B' y luego deshacemos el cambio pasando de nuevo a la base B, las coordenadas obtenidas han de ser las iniciales, es decir:

$$M_{BB'} \cdot M_{B'B} = Id \quad \Rightarrow \quad M_{BB'} = (M_{B'B})^{-1}.$$

7. Si tenemos tres bases C, B y B', se tiene la siguiente relación entre las matrices de cambio de base:

$$\boxed{M_{B'B} = M_{B'C} \cdot M_{CB}}$$

De nuevo y como regla nemotécnica, nos fijamos en que, para hallar la matriz de paso entre B y B' utilizando las relaciones entre ambas bases con la base C, en los subíndices de las dos matrices que multiplicamos la base repetida aparecen en posiciones adyacentes:

$$M_{B'B} = M_{B'\boxed{C}} \cdot M_{\boxed{C}B}$$

6 Ecuaciones de los subespacios.

Sea V un espacio vectorial y S un subespacio vectorial de V. Supongamos que $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ es una base de V y que $\{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_p\}$ es una base de S. Veamos las distintas formas de expresar los elementos de S.

Trabajaremos con coordenadas contravariantes respecto a la base B de V.

Dado un vector $\bar{x} \in V$, denotaremos sus coordenadas como $(x^1, \dots, x^n)$ o simplemente (x^i).

Las coordenadas de los vectores $\bar{s}_i$ serán denotadas por $(a_i^1, \dots, a_i^n)$ o simplemente (a_i^j).

1. **Ecuación vectorial.**

   S está formado por los vectores $\bar{x}$ verificando:

$$\boxed{\bar{x} = \alpha^1 \bar{s}_1 + \ldots + \alpha^p \bar{s}_p} \iff \boxed{\bar{x} = (\bar{s}_i)(\alpha^i)}$$

   para cualesquiera $\alpha^i \in \mathbb{K}$.

2. **Ecuaciones paramétricas.**

   S está formado por los vectores de coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ verificando:

$$\boxed{\begin{array}{c} x^1 = a_1^1\alpha^1 + a_2^1\alpha^2 + \ldots + a_p^1\alpha^p \\ x^2 = a_1^2\alpha^1 + a_2^2\alpha^2 + \ldots + a_p^2\alpha^p \\ \vdots \\ x^n = a_1^n\alpha^1 + a_2^n\alpha^2 + \ldots + a_p^n\alpha^p \end{array}} \iff \boxed{x^j = \textstyle\sum_i \alpha^i a_i^j, \qquad j = 1, 2, \dots, n}$$

   para cualesquiera $\alpha^i \in \mathbb{K}$. Los valores α^i son los **parámetros**. Para un subespacio S de dimensión p deben de aparecer p parámetros.

3. **Ecuaciones implícitas o cartesianas.**

   Eliminando parámetros en las ecuaciones paramétricas se obtienen $(n-p)$ **ecuaciones cartesianas** o **implícitas independientes**.

   S estará formado por los vectores de coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ verificando:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} b_1^1x^1 & + & b_2^1x^2 & + & \ldots & + & b_n^1x^n & = 0 \\ b_1^2x^1 & + & b_2^2x^2 & + & \ldots & + & b_n^2x^n & = 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ b_1^{n-p}x^1 & + & b_2^{n-p}x^2 & + & \ldots & + & b_n^{n-p}x^n & = 0 \end{array}}$$

7 Fórmula de las dimensiones.

Teorema 7.1 *Sea V un espacio vectorial n-dimensional. Sean S_1 y S_2 dos subespacios vectoriales de V. Se verifica:*

$$\boxed{dim(S_1+S_2)+dim(S_1\cap S_2)=dim(S_1)+dim(S_2)}$$

Prueba: Sea $a=dim(S_1)$, $b=dim(S_2)$ y $r=dim(S_1\cap S_2)$. Tomemos una base de $S_1\cap S_2$:

$$B=\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r\}$$

Como $S_1\cap S_2\subset S_1$ y $S_1\cap S_2\subset S_1$, sabemos que podemos completar esta base hasta una de S_1 y otra de S_2:

$$\begin{array}{ll} B_1=\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r,\bar{u}_{r+1},\ldots,\bar{u}_a\} & \text{base de } S_1. \\ B_2=\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r,\bar{v}_{r+1},\ldots,\bar{v}_b\} & \text{base de } S_2. \end{array}$$

Veamos que $B'=\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r,\bar{u}_{r+1},\ldots,\bar{u}_a,\bar{v}_{r+1},\ldots,\bar{v}_b\}$ es una base de S_1+S_2:

- En primer lugar está claro que es un sistema generador de S_1+S_2 ya que:

$$\begin{aligned} S_1+S_2 &= \mathcal{L}\{S_1\cup S_2\}= \\ &= \mathcal{L}\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r,\bar{u}_{r+1},\ldots,\bar{u}_a,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r,\bar{v}_{r+1},\ldots,\bar{v}_b\}= \\ &= \mathcal{L}\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r,\bar{u}_{r+1},\ldots,\bar{u}_a,\bar{v}_{r+1},\ldots,\bar{v}_b\}. \end{aligned}$$

- Ahora veamos que son linealmente independientes. Supongamos que tenemos una expresión:

$$\lambda^1\bar{x}_1+\ldots+\lambda^r\bar{x}_r+\alpha^{r+1}\bar{u}_{r+1}+\ldots+\alpha^a\bar{u}_a+\beta^{r+1}\bar{v}_{r+1}+\ldots+\beta^b\bar{v}_b=\bar{0}$$

queremos ver que entonces todos los coeficientes de esta suma son nulos.

La expresión anterior puede escribirse como:

$$\underbrace{\lambda^1\bar{x}_1+\ldots+\lambda^r\bar{x}_r+\alpha^{r+1}\bar{u}_{r+1}+\ldots+\alpha^a\bar{u}_a}_{\in S_1}=\underbrace{-\beta^{r+1}\bar{v}_{r+1}-\ldots-\beta^b\bar{v}_b}_{\in S_2} \qquad (*)$$

Deducimos que ambos términos tienen que estar en $S_1\cap S_2$, es decir, han de ser combinación lineal de elementos de B. En particular:

$$-\beta^{r+1}\bar{v}_{r+1}-\ldots-\beta^b\bar{v}_b=\gamma^1\bar{x}_1+\ldots+\gamma^r\bar{x}_r$$

o equivalentemente:

$$\gamma^1\bar{x}_1+\ldots+\gamma^r\bar{x}_r+\beta^{r+1}\bar{v}_{r+1}+\ldots+\beta^b\bar{v}_b=0.$$

Como B_2 es base de S_2, es un sistema libre y necesariamente

$$\beta^{r+1}=\ldots=\beta^b=0.$$

Ahora el primer término de la igualdad $(*)$ también es $\bar{0}$ y por ser B_1 una base sus vectores son independientes y necesariamente

$$\lambda^1=\ldots=\lambda^r=\alpha^{r+1}=\ldots=\alpha^a=0.$$

■

Como consecuencia de este resultado y del razonamiento que hemos hecho en su prueba, concluimos también que:

Corolario 7.2 *Sea U un espacio vectorial de dimensión finita. Si S_1, S_2 son subespacios vectoriales de U y $S_1 + S_2$ es una suma directa, entonces:*

$$dim(S_1 \oplus S_2) = dim(S_1) + dim(S_2).$$

Además si B_1 y B_2 son bases respectivamente de S_1 y S_2, entonces $B_1 \cup B_2$ es una base de $S_1 \oplus S_2$.

Y aplicando sucesivamente este resultado a varios subespacios vectoriales se obtiene:

Corolario 7.3 *Sea U un espacio vectorial de dimensión finita. Si $S_1, \ldots, S_k$ son subespacios vectoriales de U y $S_1 + \ldots + S_k$ es una suma directa, entonces:*

$$dim(S_1 \oplus \ldots \oplus S_k) = dim(S_1) + \ldots + dim(S_k).$$

Además si $B_1, \ldots, B_k$ son bases respectivamente de $S_1, \ldots, S_k$, entonces $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ es una base de $S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$.

8 Apéndice: método usual de trabajo en espacios vectoriales.

La gran virtud de los espacios vectoriales, es que una vez que hemos fijado una base, sus elementos pueden expresarse mediante las coordenadas respecto a esa base. Todo el trabajo que tengamos que hacer con ellos se realizará operando con esas coordenadas mediante a cálculo matricial. Esto es independiente de la naturaleza del espacio vectorial que manejamos (espacios R^n, espacios de funciones, de matrices, etc...). Resumimos éste hecho en el siguiente esquema:

Método de trabajo en un espacio vectorial:

1. **Fijar una base.**
2. **Expresar los datos en coordendas respecto a la base fijada.**
3. **Operar con estos datos (cálculo matricial) hasta obtener el resultado deseado.**
4. **Expresar el resultado en el contexto del espacio vectorial de partida.**

8.1 Ejemplo:

Planteamos el siguiente problema. Sea U el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 2 que tienen a 0 como raíz y V aquellos que tienen a 1 como raíz. Calcular $U \cap V$, es decir, los polinomios de grado menor o igual que 2 que se anulan en 0 y en 1.

Evidentemente aplicando unas nociones básicas de teoría de polinomios, uno puede llegar rápidamente a que los polinomios de grado menor o igual que 2 que se anulan en 0 y 1 son de la forma:

$$p(x) = kx(x-1) = kx^2 - kx.$$

Sin embargo nosotros vamos a plantear y resolver el problema única y exclusivamente desde la teoría de espacios vectoriales.

Trabajaremos en el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(R)$ de polinomios de grado menor o igual que 2. Seguimos el esquema descrito:

1. **Fijar una base.**

   La base canónica de $\mathcal{P}_2(R)$ es $B = \{1, x, x^2\}$. Trabajaremos con respecto a ella de manera que las coordenadas de un polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ son (a, b, c).

2. **Expresar los datos en coordendas respecto a la base fijada.**

   El conjunto U es:
   $$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(R) |\, p(0) = 0\}.$$
   Si $p(x) = a + bx + cx^2$ entonces la condición para pertenecer a U es:
   $$p(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.$$
   Por tanto en coordenadas respecto a la base B, el subconjunto se escribe:
   $$U = \{(a, b, c) \in \mathcal{P}_2(R) |\, a = 0\}.$$
   Como la condición $a = 0$ es lineal, U es un subespacio vectorial.

   Razonando de manera análoga para el conjunto V:
   $$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(R) |\, p(1) = 0\}.$$
   llegamos a que expresado en coordenadas respecto a la base B es el subespacio vectorial:
   $$V = \{(a, b, c) \in \mathcal{P}_2(R) |\, a + b + c = 0\}.$$

3. **Operar con estos datos (cálculo matricial) hasta obtener el resultado deseado.**

   Ahora lo que nos pieden es calcular $U \cap V$. Tenemos las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios, luego el subespacio intersección está generado por ambas:
   $$U \cap V = \{(a, b, c) \in \mathcal{P}_2(R) |\, a = 0, \quad a + b + c = 0\}.$$
   Como las dos ecuaciones son independientes y $dim(\mathcal{P}_2(R)) = 3$, el subespacio $U \cap V$ tiene dimensión $3-2 = 1$. Buscamos una base, es decir, un vector que cumpla ambas ecuaciones:
   $$a = 0, \quad a + b + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0, \quad b = -c.$$
   Podemos tomar el vector $(0, 1, -1)$. Luego:
   $$U \cap V = \mathcal{L}\{(0, 1, -1)\}.$$

4. **Expresar el resultado en el contexto del espacio vectorial de partida.**

   Ahora el polinomio de coordenadas $(0, 1, -1)$ respecto a la base B es:
   $$0 \cdot 1 + 1 \cdot x - 1 \cdot x^2 = x - x^2.$$
   Por tanto:
   $$U \cap V = \mathcal{L}\{x - x^2\}.$$
   Es decir los polinomios que tienen como raíz al 0 y al 1 son todos los múltiplos del polinomio $x - x^2$.