Tema III

Espacios vectoriales

1. Espacios vectoriales y subespacios vectoriales.

1 Espacios vectoriales.

1.1 Definición.

Definición 1.1 *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo conmutativo y* V *un conjunto no vacío. Se dice que* V *tiene estructura de* **espacio vectorial sobre** $\mathbb{K}$ *si cumple:*

1. *Existe una operación interna* $+ : V \times V \to V$ *(que se llama suma) con la cual* V *tiene estructura de grupo abeliano, es decir, se verifica:*

   (a) *Propiedad asociativa:* $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$, *para cualesquiera* $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$.

   (b) *Elemento neutro:* $\exists \bar{0} \in V$ *tal que* $\bar{0} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$, *para cualquier* $\bar{x} \in V$.

   (c) *Elemento opuesto: para cualquier* $\bar{x} \in V$, $\exists(-\bar{x}) \in V$ *con*

   $$\bar{x} + (-\bar{x}) = (-\bar{x}) + \bar{x} = \bar{0}.$$

   (d) *Conmutativa:* $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$, *para cualesquiera* $\bar{x}, \bar{y} \in V$.

2. *Existe una operación externa* $(\cdot) : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ *verificando:*

   (a) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ *para cualquier* $\bar{x} \in V$.

   (b) $(\alpha\beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{x})$, *para cualesquiera* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *y* $\bar{x} \in V$.

   (c) $(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$, *para cualesquiera* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *y* $\bar{x} \in V$.

   (d) $\alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y}$, *para cualesquiera* $\bar{x}, \bar{y} \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$.

A los elementos de un espacio vectorial se les llama **vectores.**

Algunos de los ejemplos más usuales de espacios vectoriales son:

1. $V = \mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.
2. $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de matrices $m \times n$.
3. $V = \mathcal{S}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de matrices simétricas $n \times n$.
4. $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ es el espacio vectorial de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ de grado menor o igual que n.

1.2 Propiedades

1. $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{K}$.

   Prueba: Se tiene:

$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \alpha \cdot \bar{0} + \alpha \cdot \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

2. $0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$, para cualquier $\bar{x} \in V$.

   Prueba: Se tiene:

$$0 \cdot \bar{x} = (0 + 0) \cdot \bar{x} = 0 \cdot \bar{x} + 0 \cdot \bar{x} \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot \bar{x} = \bar{0}.$$

3. $\alpha \cdot \bar{x} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \quad$ ó $\quad \bar{x} = 0$.

   Prueba: Si $\alpha \cdot \bar{x} = \bar{0}$ y $\alpha \neq 0$ entonces α tiene inverso y:

$$\bar{x} = 1 \cdot \bar{x} = (\alpha^{-1}\alpha) \cdot \bar{x} = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \bar{x}) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

4. $(-1) \cdot \bar{x} = -\bar{x}$, para cualquier $\bar{x} \in V$.

   Prueba: Basta tener en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{r} (-1) \cdot \bar{x} + \bar{x} = (-1 + 1) \cdot \bar{x} = 0 \cdot \bar{x} = \bar{0} \\ \bar{x} + (-1) \cdot \bar{x} = (1 - 1) \cdot \bar{x} = 0 \cdot \bar{x} = \bar{0} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\bar{x} = (-1) \cdot \bar{x}.$$

5. $(-\alpha) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot (-\bar{x}) = -(\alpha \cdot \bar{x})$, para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{K}$, $\bar{x} \in V$.

   Prueba: Por las propiedades anteriores:

$$\begin{array}{l} (-\alpha) \cdot \bar{x} = (-1) \cdot (\alpha \cdot \bar{x}) = -(\alpha \cdot \bar{x}). \\ (-\alpha) \cdot \bar{x} = (\alpha) \cdot ((-1) \cdot \bar{x}) = \alpha \cdot (-\bar{x}). \end{array}$$

6. Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{y}$ entonces $\bar{x} = \bar{y}$.

   Prueba: Si $\alpha \neq 0$ entonces tiene inverso y:

$$\alpha \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{y} \quad \Rightarrow \quad (\alpha^{-1}\alpha) \cdot \bar{x} = \alpha^{-1}\alpha) \cdot \bar{y} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \bar{y}.$$

7. Si $\bar{x} \neq \bar{0}$ y $\alpha \cdot \bar{x} = \beta \cdot \bar{x}$ entonces $\alpha = \beta$.

   Prueba: Se tiene:

$$\alpha \cdot \bar{x} = \beta \cdot \bar{x} \quad \Rightarrow \quad (\alpha - \beta) \cdot \bar{x} = \bar{0}.$$

   Como $\bar{x} = \bar{0}$, por las propiedades anteriores deducimos que:

$$\alpha - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta.$$

2 Subespacios vectoriales.

2.1 Definición y caracterizaciones.

Definición 2.1 *Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, un subconjunto $S \subset V$ no vacío se dice un* **subespacio vectorial** *de V si S es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con la restricción de las operaciones de V.*

En realidad para identificar los subespacios vectoriales se suele utilizar una de las siguientes caracterizaciones:

Teorema 2.2 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $S \subset V$ un subconjunto no vacío. S es un subespacio vectorial precisamente si se verifica:*

1. *$\bar{x} + \bar{y} \in S$, para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in S$.*
2. *$\lambda \cdot \bar{x} \in S$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$, $\bar{x} \in S$.*

Equivalente, si se verifica:

a. $\alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y} \in S$, para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in S$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Prueba: Si se cumplen las condiciones 1 y 2 las operaciones interna y externa de V restringen a S. Por tanto por ser V espacio vectorial también lo es S. Recíprocamente, si S es subespacio vectorial de V, las operaciones han de restringir y se cumplen las condiciones 1 y 2.

Por otra parte veamos la equivalencia entre las condiciones 1,2 y la condición a.

1,2 $\Rightarrow$ a:

$$\text{Por la condición 2:} \qquad \begin{array}{ccc} \bar{x} \in S \text{ e } \alpha \in \mathbb{K} & \Rightarrow & \alpha \cdot \bar{x} \in S. \\ \bar{y} \in S \text{ e } \beta \in \mathbb{K} & \Rightarrow & \beta \cdot \bar{y} \in S. \end{array}$$

Y ahora:

$$\text{Por la condición 1:} \qquad \left.\begin{array}{c} \alpha \cdot \bar{x} \in S \\ \beta \cdot \bar{y} \in S \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y} \in S.$$

a $\Rightarrow$ 1,2:

Tomando en la condición a, $\alpha = 1, \beta = 1$ obtenemos la condición 1, $\bar{x} + \bar{y} \in S$.

Tomando en la condición a, $\beta = 0$ obtenemos la condición 2, $\alpha \cdot \bar{x} \in S$. ■

Observación 2.3 *En todo espacio vectorial V siempre hay dos subespacios vectoriales llamados* **triviales***, el total V y el subespacio cero $\{\bar{0}\}$.*

2.2 Intersección de subespacios vectoriales.

Proposición 2.4 *Sean S_1 y S_2 dos subespacios vectoriales de V, la intersección $S_1 \cap S_2$ es un subespacio vectorial.*

Prueba: En primer lugar tenemos en cuenta que $S_1 \cap S_2$ es no vacío, porque $\bar{0} \in S_1$ y $\bar{0} \in S_2$. Ahora comprobamos la condición de subespacio vectorial. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in S_1 \cap S_2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \bar{x}, \bar{y} \in S_1 \cap S_2 & \Rightarrow & \bar{x}, \bar{y} \in S_1 & \Rightarrow & \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y} \in S_1 \\ \bar{x}, \bar{y} \in S_1 \cap S_2 & \Rightarrow & \bar{x}, \bar{y} \in S_2 & \Rightarrow & \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y} \in S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y} \in S_1 \cap S_2.$$

■

2.3 Suma de subespacios vectoriales.

En primer lugar observemos que la unión de subespacios vectoriales no tiene por que ser un subespacio vectorial. Por ejemplo consideramos:

$$V = \mathbb{R}^2; \quad S_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2,\, x \in \mathbb{R}\}; \quad S_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2,\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Si tomamos $(1,0) \in S_1 \cup S_2$ y $(0,1) \in S_1 \cup S_2$, se tiene $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin S_1 \cup S_2$ y por tanto la unión de S_1 y S_2 no es un subespacio vectorial.

Sin embargo, dados dos subespacios vectoriales si podremos definir el subespacio suma, mayor que la unión.

Definición 2.5 *Sean S_1 y S_2 dos subespacios vectoriales de V, definimos la* **suma** *de S_1 y S_2 como:*

$$S_1 + S_2 = \{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \ \ con\ \bar{x}_1 \in S_1 \ \ y\ \bar{x}_2 \in S_2\}$$

Proposición 2.6 *La suma de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.*

Prueba: Sean $S_1, S_2 \in V$ dos subespacios vectoriales de V. Tomemos $\bar{x}, \bar{y} \in S_1 + S_2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Se tiene:

$$\begin{array}{lcl} \bar{x} \in S_1 + S_2 & \Rightarrow & \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \text{ con } \bar{x}_1 \in S_1, \bar{x}_2 \in S_2 \\ \bar{y} \in S_1 + S_2 & \Rightarrow & \bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2, \text{ con } \bar{y}_1 \in S_1, \bar{y}_2 \in S_2 \end{array}$$

por tanto

$$\alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y} = \alpha \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + \beta \cdot (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \underbrace{\alpha \cdot \bar{x}_1 + \beta \cdot \bar{y}_1}_{\in S_1} + \underbrace{\alpha \cdot \bar{x}_2 + \beta \cdot \bar{y}_2}_{\in S_2} \in S_1 + S_2.$$

■

Proposición 2.7 *La suma de dos subespacios vectoriales es el menor subespacio vectorial que contiene a unión.*

Prueba: Sean $S_1, S_2 \in V$ dos subespacios vectoriales de V. En primer lugar está claro que $S_1 \cup S_2 \in S_1 + S_2$. Ahora sea S un subespacio conteniendo a $S_1 \cup S_2$ y veamos que $S_1 + S_2 \subset S$.

$$\bar{x} \in S_1 + S_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1 \in S_1 \subset S_1 \cup S_2 \subset S \\ \bar{x}_2 \in S_2 \subset S_1 \cup S_2 \subset S \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in S.$$

■

Este concepto de generaliza de manera natural para un número finito de subespacios.

Definición 2.8 *Sean $S_1, S_2, \ldots, S_k$ subespacios vectoriales de V, definimos su* **suma** *como:*

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_k = \{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_k \ \ con\ \bar{x}_1 \in S_1, \quad \bar{x}_2 \in S_2, \quad , \ldots, \bar{x}_k \in S_k\}$$

2.4 Suma directa.

Definición 2.9 *Sean S_1, S_2 dos subespacios vectoriales de U. Si $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$, entonces al espacio suma $S_1 + S_2$ se le llama* **suma directa de** S_1 **y** S_2 *y se denota por:*

$$S_1 \oplus S_2.$$

Proposición 2.10 *Sean S_1, S_2 dos subespacios vectoriales de U. La suma $S_1 + S_2$ es una suma directa si y sólo si todo elemento de $S_1 + S_2$ se descompone de manera* **única** *como suma de un elemento de S_1 y otro de S_2.*

Prueba: Supongamos en primer lugar que la suma es directa, es decir $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$. Veamos que entonces la descomposición es única. Sea $\bar{x} \in S_1 + S_2$. Si:

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \quad \text{con } \bar{x}_1, \bar{y}_1 \in S_1 \quad \text{y} \quad \bar{x}_2, \bar{y}_2 \in S_2$$

entonces

$$\bar{x}_1 - \bar{y}_1 = \bar{y}_2 - \bar{x}_2 \in S_1 \cap S_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 - \bar{y}_1 = \bar{y}_2 - \bar{x}_2 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \bar{y}_1, \quad \bar{x}_2 = \bar{y}_2.$$

Ahora supongamos que la descomposición es única y veamos que la suma es directa. Hay que comprobar que $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$. Sea $\bar{x} \in S_1 \cap S_2$; puede descomponerse como:

$$\bar{x} = \bar{x} + \bar{0} \text{ con } \bar{x} \in S_1, \bar{0} \in S_2, \quad \text{y también} \quad \bar{x} = 0 + \bar{x} \text{ con } \bar{0} \in S_1, \bar{x} \in S_2.$$

Por la unicidad de la descomposición deducimos que $\bar{x} = \bar{0}$. ■

Este concepto puede ser generalizado a más de dos subespacios.

Definición 2.11 *Sean $S_1, S_2 \ldots, S_k$ subespacios vectoriales de U. Si $(S_1 + \ldots + S_i) \cap S_{i+1} = \{0\}$ para cualquier i, $1 \leq i \leq k-1$ entonces al espacio suma $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ se le llama* **suma directa de** $S_1, S_2, \ldots, S_k$ *y se denota por:*

$$S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_k.$$

Proposición 2.12 *Sean $S_1, S_2, \ldots, S_k$ subespacios vectoriales de U. La suma $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ es una suma directa si y sólo si todo elemento de $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ se descompone de manera* **única** *como suma de elementos de $S_1, S_2, \ldots, S_k$.*

Prueba: Supongamos que la suma es directa. Sea $\bar{x} \in S_1 + \ldots + S_k$ y supongamos que tenemos dos descomposiciones distintas de $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_k = \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_k, \qquad \bar{x}_i, \bar{y}_i \in S_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Entonces aplicando que $(S_1 + \ldots + S_{k-1}) + S_k$ es una suma directa vemos que $x_k = y_k$, y:

$$\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_{k-1} = \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_{k-1}.$$

Utilizando ahora que $(S_1 + \ldots + S_{k-2}) + S_{k-1}$ es una suma directa vemos que $x_{k-1} = y_{k-1}$,

$$\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_{k-2} = \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_{k-2}.$$

Repitiendo el proceso deducimos que $x_i = y_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Recíprocamente supongamos que la descomposición es única. Veamos que para cualquier $i = 2, \ldots, k$, $(S_1 + \ldots + S_i) + S_{i+1}$ es una suma directa.

Cualquier $\bar{x} \in S_1 + \ldots + S_i$ se escribe como suma de elementos de $S_1, \ldots, S_i$. Por hipótesis esta descomposición es única. Aplicando la Proposición 2.10 deducimos que la suma es directa, es decir, $(S_1 + \ldots + S_i) \cap S_{i+1} = \{\bar{0}\}$. ■

2.5 Subespacios suplementarios.

Definición 2.13 *Sean S_1, S_2 dos subespacios vectoriales de V. Se dice que son* **suplementarios** *si cumplen:*

$$\begin{array}{rcl} S_1 \cap S_2 & = & \{0\} \\ S_1 + S_2 & = & V \end{array}$$

o equivalentemente:

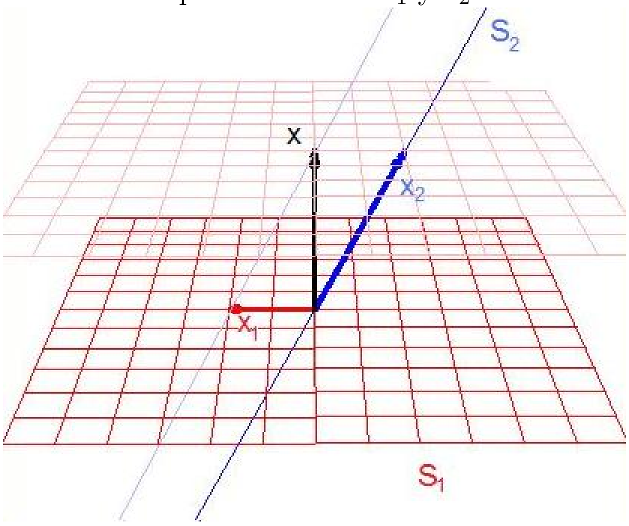
$$S_1 \oplus S_2 = V.$$

Si S_1, S_2 son subespacios suplementarios sabemos que un vector $\bar{x} \in V$ cualquiera se descompone de manera única como $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, con $\bar{x}_1 \in S_1$ y $\bar{x}_2 \in S_2$:

$\bar{x}_1$ se llama la **proyección de $\bar{x}$ sobre S_1 paralelamente a** S_2.

$\bar{x}_2$ se llama la **proyección de $\bar{x}$ sobre S_2 paralelamente a** S_1.

Es interesante tener en cuenta que más allá del trasnfondo algebraico el concepto es muy geométrico. En el siguiente dibujo está representado un ejemplo. Lo subespacios suplementarios son el plano S_1 (en rojo) y la recta S_2 (en azul), cualquier vector $\vec{x}$ puede descomponerse como suma de un par de vectores $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ en cada uno de los subespacios.



Geométricamente el vector $\vec{x}_1$ se construye tomando la recta paralela a S_2 por el extremos del vector $\vec{x}$ y cortando con el plano S_1. De ahí que se llame proyección de $\bar{x}$ sobre S_1 paralelamente a S_2.

Análogamente el vector $\vec{x}_2$ se construye cortando el plano paralelo a S_1 por el extremo de $\vec{x}$ con la recta S_1.

Basándonos en esta descomposición, podemos definir la siguientes **funciones proyección:**

$$\begin{array}{rccc} p_1 : & V & \longrightarrow & V \\ & \bar{x} & \longrightarrow & \bar{x}_1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} p_2 : & V & \longrightarrow & V \\ & \bar{x} & \longrightarrow & \bar{x}_2 \end{array}$$

La función p_1 se llama la función proyección sobre S_1 paralelamente a S_2 y la función p_2 es la función proyección sobre S_2 paralelamente a S_1.

Estas funciones verifican las siguientes propiedades:

1. $p_1 + p_2 = Id$.
2. $p_1 \circ p_1 = p_1$ y $p_2 \circ p_2 = p_2$.
3. $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.