4. Sistemas de ecuaciones lineales.

1 Definiciones y representación matricial.

1.1 Definiciones básicas.

Definición 1.1 *Un sistema de m ecuaciones lineales de n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$ es un conjunto de ecuaciones de la forma:*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} m \text{ ecuaciones}$$

donde los coeficientes $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$.

Si todos los términos independientes $b_1, \ldots, b_m$ son nulos, el sistema se dice **homogéneo.**

Un sistema de ecuaciones se dice **compatible** si tiene alguna solución, es decir, si existen escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ verificando las m ecuaciones que lo componen. En otro caso se dice **incompatible**.

Cuando el sistema es compatible, se dice además que es **determinado** si la solución es única e **indeterminado** si existe más de una solución.

1.2 Representación matricial.

Dado el sistema de ecuaciones definido anteriormente podemos escribirlo matricialmente como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

Llamamos:

- $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ **matriz de coeficientes** del sistema o simplemente **matriz del sistema**.

- $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ **matriz (o vector columna) de incógnitas**.

- $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ **matriz (o vector columna) de términos independientes**.

Adicionalmente denotamos por $\bar{A} \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$ a la matriz que se obtiene añadiendo a la matriz A el vector columna de términos independientes y se llama la **matriz ampliada del sistema**:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

2 Existencia de solución: Teorema de Rouché-Fröbenius.

Teorema 2.1 (Teorema de Rouché-Fröbenius) *Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas es compatible si y sólo si el rango de la matriz del sistema coincide con el rango de la matriz ampliada.*

Prueba: Consideremos el sistema en su forma matricial $AX = B$. La existencia de solución equivale a la existencia de escalares $x_1, \ldots, x_n$ tales que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \qquad \text{para } i = 1, \ldots, m.$$

Si denotamos por A_i las columnas de la matriz A esa relación puede escribirse como:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k A_k = B.$$

Es decir, el vector columna B es combinación lineal de las columnas de la matriz A.

Por tanto el sistema es compatible si y sólo si el vector columna B es combinación lineal de las columnas de A. Pero teniendo en cuenta que el rango de una matriz coincide con el número de columnas independientes de la misma (véase el Teorema 4.2, del Capítulo 2, Tema III), deducimos el resultado. ■

3 Sistemas equivalentes y métodos de resolución.

3.1 Sistemas equivalentes.

Definición 3.1 *Dos sistemas lineales de n incógnitas se dicen* **equivalentes** *si tienen exactamente las mismas soluciones.*

Teorema 3.2 *Sean $AX = B$ y $A'X = B'$ dos sistemas lineles de m ecuaciones y n incógnitas. Si $\bar{A}$ y $\bar{A}'$ son equivalentes por filas, entonces los dos sistemas son equivalentes.*

Prueba: Si $\bar{A}$ y $\bar{A}'$ son equivalentes por filas existe una matriz inversible $P \in \mathcal{M}_{m\times m}$ tal que:

$$\bar{A}' = P\bar{A}$$

y equivalentemente:

$$(A'|B') = P(A|B) \iff (A'|B') = (PA|PB) \iff A' = PA, \qquad B' = PB.$$

Entonces dada X una solución del primer sistema, es decir, un vector columna cumpliendo $AX = B$ se tiene:

$$A'X = PAX = PB = B'$$

y por tanto es también solución del segundo sistema. Recíprocamente dada X una solución del segundo sistema ($A'X = B'$) se tiene:

$$AX = P^{-1}A'X = P^{-1}B' = B$$

Vemos que X es solución del primer sistema. Concluimos que ambos sistemas tienen las mismas soluciones. ■

Observación 3.3 *Dado un sistema de ecuaciones en forma matricial $AX = B$, por el teorema anterior sabemos que haciendo operaciones elementales filas sobre la matriz ampliada $\bar{A}$, obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones con las mismas soluciones que el primero.*

Es inmediato comprobar que hacer operaciones elementales fila sobre la matriz ampliada, es lo mismo que hacer operaciones con las ecuaciones de la matriz; es decir siempre que hagamos las siguientes transformaciones sobre un sistema lineal obtendremos otro equivalente (con indénticas soluciones):

- Multiplicar una ecuación por un número no nulo.

- Intercambiar el orden de dos ecuaciones.

- Sumar a una ecuación un número multiplicado por otra.

3.2 Método de Gauss.

3.2.1 Descripción del método.

El método de Gauss para la resolución de un sistema de ecuaciones se basa en construir un sistema equivalente más sencillo que el inicial mediante el uso de operaciones elementales. En concreto el objetivo es transformar, por equivalencia por filas, la matriz asociada al sistema en una escalonada con uno como elemento principal (o pivote) de cada fila.

Los pasos para resolver un sistema por el método de Gauss son los siguientes:

1. Consideramos la matriz ampliada $\overline{A}$ asociada al sistema.
2. Reducimos esa matriz con operaciones elementales fila hasta convertirla en una matriz escalonada por filas:
   (a) Si la matriz está compuesta completamente por ceros, entonces hemos términado.
   (b) En caso contrario y comenzando por la izquierda, localizamos la primera columna con algún elemento no nulo a y movemos la fila en la que aparece a la pimera posición.
   (c) Dividimos la primera fila por a para que el primer elemento no nulo sea 1.
   (d) Utilizando la primera fila y mediante operaciones elementales "hacemos ceros" en todas las filas debajo del 1-principal de la primera fila.
   (e) Repetimos el proceso sobre la matriz que resulta de tomar las filas restantes. Finalizamos si hemos terminado con todas las filas no nulas.
3. Tenemos una nuevo sistema equivalente al primero (ya que hemos hecho operaciones fila sobre su matriz ampliada) pero ahora con la matria ampliada $\overline{A}'$ escalonada.
4. Si hay alguna fila de ceros, excepto en su último elemento (el correspondiente al término independiente) el sistema es incompatible.
5. En otro caso el sistema es compatible; pasamos todos los términos de las columnas donde no aparezcan 1-principales al segundo miembro y tendremos un sistema de $rango(A)$ incógnitas y $n - rango(A)$ parámetros, que podemos ir resolviendo trivialmente comenzando por la última ecuación y terminando por la primera.

3.2.2 Ejemplo del Método de Gauss

Supongamos que queremos resolver el sistema:

$$\begin{array}{rrrrcl} & 3y & -z & & = & 6 \\ x & +y & +z & +t & = & 5 \\ 2x & -y & +3z & +2t & = & 4 \end{array}$$

La matriz ampliada asociada al mismo es:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

La escalonamos por filas:

$$\bar{A} \overset{H_{12}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{H_{31}(-2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -6 \end{array}\right) \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow}$$

$$\overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{H_{2}(1/3)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtenemos por tanto el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +y & +z & +t & = & 5 \\ & y & -\frac{1}{3}z & & = & 2 \end{array}$$

No hay ninguna fila con todos los términos nulos excepto el independiente, por tanto el sistema es compatible. Pasamos al segundo miembro las incógnitas correspondientes a columnas donde no hay 1-principales:

$$\begin{array}{rrcl} x & +y & = & 5 - z - t \\ & y & = & 2 + \frac{1}{3}z \end{array}$$

Obtendremos la solución por tanto en función de dos parámetros (el sistema es entonces compatible indeterminado).

De la última, directamente:

$$y = 2 + \frac{1}{3}z.$$

y sustituyendo en la pimera:

$$x = 5 - z - t - y = 5 - z - t - 2 - \frac{1}{3}z = 3 - \frac{4}{3}z - t.$$

3.3 Regla de Cramer.

Teorema 3.4 (Regla de Cramer) *Dado un sistema $AX = B$ de n ecuaciones lineales y n incógnitas compatible y determinado, las soluciones pueden obtenerse como:*

$$x_i = \frac{det(M_i)}{det(A)} \qquad para\ , \quad i = 1, ldots, n,$$

siendo M_i la matriz que se obtiene de susituir la columna i-ésima de A por el vector de términos independientes.

Prueba: Como el sistema es compatible determinado sabemos que $rango(A) = n$ y así A es inversible. Entonces:

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B.$$

Ahora recordemos que la matriz A^{-1} puede obtenerse como:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}.$$

Entonces:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n}(A^{-1})_{ik}B_k = \frac{1}{det(A)}\sum_{k=1}^{n}A_{ki}B_i$$

Pero este es justo el desarrollo por adjuntos de la matriz que se obtiene de susituir la columna i-ésima de A por el vector de términos independientes B. ■

Corolario 3.5 *Sea $AX = B$ un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas compatible; entonces el conjunto de soluciones depende de $n - rango(A)$ parámetros.*

Prueba: Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, por ser un sistema compatible, el rango de la matriz coincide con el rango de la matriz ampliada. Esto quiere decir que existen $rango(A)$ ecuaciones independientes. Todas las demás pueden ponerse como combinación lineal de ellas y por tanto haciendo operaciones elementales podemos eliminarlas y obtener un sistema $A'X = B'$ equivalente al primero, de exactamente $rango(A) = rango(A')$ ecuaciones.

Ahora por definición de rango, existe un menor de la matriz A' de determinante no nulo; ese menor se obtiene escogiendo $rango(A')$ columnas de la matriz; nótese que cada columna corresponde a los coeficientes que multiplican a una de las incógnitas x_i. Pasando las incógnitas que no seleccionamos al otro miembro y considerándolas como parámetros obtenemos un sistema de $rango(A')$ ecuaciones y el mismo número de incógnitas compatible y determinado. Además puede ser inequívocamente resuelto por la Regla de Cramer.
■

4 Discusión de un sistema de ecuaciones.

Resumimos en el siguiente cuadro los resultados sobre existencia y unicidad de un sistema de ecuaciones, basados en los teoremas vistos a lo largo del capítulo.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} m \text{ ecuaciones}$$

Se cumple:

1. Si $rango(A) = rango(\bar{A})$ el sistema compatible. Si además:
   (a) $rango(A) = rango(\bar{A}) = n$, el sistema es compatible determinado.
   (b) $rango(A) = rango(\bar{A}) < n$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de $n - rango(A)$ parámetros.
2. Si $rango(A) < rango(\bar{A})$ entonces el sistema es incompatible.