3. Equivalencia y congruencia de matrices.

1 Transformaciones elementales.

1.1 Operaciones elementales de fila.

Las **operaciones elementales de fila** son:

1. H_{ij} : Permuta la fila i con la fila j.
2. $H_i(\lambda)$: Multiplica la fila i por un escalar $\lambda \neq 0$.
3. $H_{ij}(\lambda)$: A la fila i se le suma la fila j multiplicada por λ.

1.2 Matrices elementales de fila.

Las **matrices elementales de fila** son el resultado de aplicar una operación elemental fila a la matriz identidad de una determinada dimensión. Por tanto tendremos tres tipos de matrices elementales fila:

1. H_{ij} : Matriz obtenida al intercambiar las filas i, j de la matriz identidad.
2. $H_i(\lambda)$: Matriz obtenida al multiplicar la fila i de la identidad por $\lambda \neq 0$.
3. $H_{ij}(\lambda)$: Matriz obtenida al sumar en la matriz identidad a la fila i ,la fila j multiplicada por λ.

Teorema 1.1 *Realizar una operación elemental* **fila** *sobre una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es lo mismo que multiplicar dicha matriz* **por la izquierda** *por la correspondiente matriz elemental de fila de dimensión m.*

Prueba:

1. Calculemos $B = H_{\alpha\beta} \cdot A$:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (H_{\alpha\beta})_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq \alpha,\ i \neq \beta. \\ a_{\beta j} & \text{si } i = \alpha. \\ a_{\alpha j} & \text{si } i = \beta. \end{cases}$$

Vemos que la matriz B se obtiene de la A intercambiando las filas α, β.

2. Calculemos $B = H_\alpha(\lambda) \cdot A$:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} H_\alpha(\lambda)_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq \alpha. \\ \lambda a_{\alpha j} & \text{si } i = \alpha. \end{cases}$$

Vemos que la matriz B se obtiene de la A multiplicando la fila α por λ.

3. Calculemos $B = H_{\alpha\beta}(\lambda) \cdot A$:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} H_{\alpha\beta}(\lambda)_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq \alpha. \\ a_{ij} + \lambda a_{\beta j} & \text{si } i = \alpha. \end{cases}$$

   Vemos que la matriz B se obtiene de la A sumándole a la fila α la fila β multiplicada por λ.

Proposición 1.2 *Todas las matrices elementales de fila son inversibles. En particular:*

$$(H_{ij})^{-1} = H_{ij}; \qquad (H_i(\lambda))^{-1} = H_i(\frac{1}{\lambda}); \qquad (H_{ij}(\lambda))^{-1} = H_{ij}(-\lambda);$$

Prueba: Basta tener en cuenta lo siguiente:

- La operación elemental inversa de intercambiar las filas i, j es volver a intercambiar dichas filas.

- La operación elemental inversa de multiplicar la fila i por λ es dividirla por λ.

- La operación elemental inversa de sumarle a la fila i, la fila j multiplicada por λ, es restarle a la fila i la fila j multiplicada por λ.

1.3 Operaciones elementales de columna.

Las **operaciones elementales de columna** son:

1. ν_{ij} : Permuta la columna i con la columna j.
2. $\nu_i(\lambda)$: Multiplica la columna i por un escalar $\lambda \neq 0$.
3. $\nu_{ij}(\lambda)$: A la columna i se le suma la columna j multiplicada por λ.

1.4 Matrices elementales de columna.

Las **matrices elementales de columna**, son el resultado de aplicar una operación elemental columna a la matriz identidad de una determinada dimensión. Por tanto tendremos tres tipos de matrices elementales columna:

1. ν_{ij} : Matriz obtenida al intercambiar las columnas i, j de la matriz identidad.
2. $\nu_i(\lambda)$: Matriz obtenida al multiplicar la columna i de la identidad por $\lambda \neq 0$.
3. $\nu_{ij}(\lambda)$: Matriz obtenida al sumar en la matriz identidad a la columna i ,la columna j multiplicada por λ.

Es claro que:

$$\nu_{ij} = (H_{ij})^t; \qquad \nu_i(\lambda) = (H_i(\lambda))^t; \qquad \nu_{ij}(\lambda) = (H_{ij}(\lambda))^t;$$

Como consecuencia de esto, las matrices elementales columna cumplen propiedades análogas a las de las matrices elementales fila.

Teorema 1.3 *Realizar una operación elemental* **columna** *sobre una matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *es lo mismo que multiplicar dicha matriz* **por la derecha** *por la correspondiente matriz elemental de columna de dimensión* n.

Proposición 1.4 *Todas las matrices elementales de columna son inversibles. En particular:*

$$(\nu_{ij})^{-1} = \nu_{ij}; \qquad (\nu_i(\lambda))^{-1} = \nu_i(\frac{1}{\lambda}); \qquad (\nu_{ij}(\lambda))^{-1} = \nu_{ij}(-\lambda);$$

2 Equivalencia de matrices por filas.

2.1 Definición y propiedades.

Definición 2.1 *Dos matrices* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *se dicen* **equivalentes por filas** *o* **equivalentes por la izquierda** *cuando se puede pasar de una a otra mediante un número finito de operaciones fila:*

$$A, B \text{ equivalentes por filas} \iff B = H_p \cdot H_{p-1} \cdot \ldots H_1 \cdot A.$$

Veamos algunas propiedades:

1. *La equivalencia por filas cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:*

   - Reflexiva (toda matriz es simétrica consigo misma). Está claro que toda matriz es equivalente por filas a sí misma.

   - Simétrica (si A es equivalente con B, B lo es con A). Si A y B son equivalentes por filas:

   $$B = H_p \cdot H_{p-1} \cdot \ldots \cdot H_1 \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = H_1^{-1} \cdot \ldots \cdot H_{p-1}^{-1} \cdot H_p^{-1} \cdot B.$$

   Teniendo en cuenta que la inversa de una operación elemental fila vuelve a ser una operación elemental fila, deducimos que B y A son equivalentes por filas.

   - Transitiva (si A es equivalente con B, y B lo es con C entonces A es equivalente con C): Si A y B son equivalentes por filas y B y C también se tiene:

   $$\left.\begin{array}{l} B = H_p \cdot H_{p-1} \cdot \ldots \cdot H_1 \cdot A \\ C = H'_q \cdot H'_{q-1} \cdot \ldots \cdot H'_1 \cdot B \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad C = H'_q \cdot H'_{q-1} \cdot \ldots \cdot H'_1 \cdot H_p \cdot H_{p-1} \cdot \ldots \cdot H_1 \cdot A$$

   y por tanto A y C son equivalentes por filas.

2. *Dos matrices equivalentes por filas tienen la misma dimensión.*

3. *Dos matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango.*

   Prueba: Vimos que el rango de una matriz no varía si realizamos transformaciones elementales sobre una matriz.

   Observación: Dos matrices que tengan el mismo rango no tienen porque ser equivalentes por filas. Por ejemplo:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Forma canónica reducida de una matriz respecto de la equivalencia de filas.

Definición 2.2 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ el primer elemento no nulo de cada fila se llama* **elemento principal o pivote**

Definición 2.3 *Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ está* **en forma escalonada por filas** *si el elemento principal de cada fila está a la derecha del elemento principal de la fila anterior.*

Definición 2.4 *Una* **forma canónica reducida por filas** *es una matriz $R \in \mathcal{M}_{m\times n}$ con las siguientes características:*

1. *Es una matriz escalonada por filas.*
2. *El elemento principal de cada fila es uno.*
3. *Encima y debajo de los elementos principales de cada una de las filas sĺo hay ceros.*

Algunos ejemplos de formas canónicas reducidas por filas son (en rojo están marcados los elementos principales de cada fila):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forma canónica reducida por filas de una matriz dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es una forma canónica reducida por filas equivalente por filas a A. Intuitivamente, es la matriz más sencilla posible equivalente por filas a la matriz dada. Puede probarse que la forma canónica reducida por filas de una matriz A es única y de ahí el siguiente resultado:

Teorema 2.5 *Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ son equivalentes por filas si y sólo si tienen la misma forma canónica reducida por filas.*

2.3 Cálculo de la forma canónica reducida por filas de una matriz dada.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se trata de aplicarle operaciones elementales fila hasta obtener su forma canónica reducida por filas. Para ello se irán simplificando sucesivamente las columnas de la matriz A. El procedimiento es el siguiente:

1. Si en la primera columna hay un elemento distinto de 0, lo llevamos a la posición $1,1$ mediante una cambio de filas H_{1j}. Si todos los elementos son nulos, se pasa a la siguiente columna.
2. Ahora el elemento $a'_{1,1}$ de la posición $1,1$ se hace igual a 1 dividiendo la fila por su valor. La operación elemental es $H_1(\frac{1}{a'_{11}})$.
3. Se hacen ceros en la primera columna, debajo del 1 obtenido antes. Para ello sucesivamente se van haciendo las operaciones $H_{j1}(-a'_{j1})$.

4. Se vuelve a repetir el proceso análogo con la siguiente columna, teniendo en cuenta que cada vez que conseguimos una columna con un 1 y los demás elementos nulos, ésta no se volverá a modificar.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ veamos cual es su forma canónica reducida por filas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4 Equivalencia por filas de una matriz cuadrada regular.

Teorema 2.6 *Si A es una matriz cuadrada regular n-dimensional entonces es equivalente por filas a la matriz identidad.*

Prueba: Basta aplicar el proceso descrito en la sección anterior a la matriz A. Teniendo en cuenta que A es regular, todas la matrices equivalentes a ellas por filas también lo son. Por tanto en cada uno de los pasos que hacemos durante su reducción nunca puede aparecer ni una fila de ceros ni una columna de ceros. Como consecuencia de esto al terminar el proceso de reducción por filas siempre se llega a la matriz identidad. ■

Corolario 2.7 *Si A es una matriz cuadrada regular n-dimensional entonces se descompone en transformaciones elementales fila.*

Prueba: Por el resultado anterior, Id y A son equivalenes por filas y por tanto:

$$A = H_p \cdot H_{p-1} \cdot \ldots \cdot H_1 \cdot Id = H_p \cdot H_{p-1} \cdot \ldots \cdot H_1.$$

■

Corolario 2.8 *Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ son equivalentes por filas si y sólo si existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_{m\times m}$ tal que:*

$$B = PA.$$

Prueba: Por la definición de equivalencia por filas está claro que si son equivalentes por filas existe la matriz P. Recíprocamente si existe una matriz P regular por el corolario anterior sabemos que descompone en transformaciones elementales fila y por tanto:

$$B = PA \quad \Rightarrow \quad B = H_p \cdot H_{p-1} \cdot \ldots \cdot H_1 \cdot A \quad \Rightarrow \quad A, B \text{ equivalentes por filas.}$$

■

Observación 2.9 *Si hacemos operaciones fila sobre una matriz A hasta llegar a otra B, podemos saber cual es la matriz P con $B = PA$, de dos formas:*

- Bien haciendo sobre la identidad, las mismas transformaciones fila que hicimos sobre B.

- Bien realizando todo el proceso al mismo tiempo. Para ello colocamos al lado de A la matriz identidad y hacemos operaciones fila:

$$(\,A\,|\,I\,) \longrightarrow \textit{ Operaciones fila } \longrightarrow (\,B\,|\,P\,)$$

2.5 Cálculo de la inversa mediante operaciones fila (método de Gauss-Jordan).

Utilizando los resultados sobre equivalencia por filas vistos hasta ahora, podemos hallar la inversa de una matriz cuadrada regular de la siguiente forma.

Colocamos a la derecha de la matriz A la identidad. Reducimos la matriz A hasta convertirla en la identidad haciendo operaciones fila por el método descrito en este tema. Al final a la derecha nos quedará la matriz inversa de A:

$$(\, A \,|\; I \,) \longrightarrow \text{ Operaciones fila } \longrightarrow (\, I \,|\; A^{-1} \,)\,.$$

3 Equivalencia de matrices por columnas.

Definición 3.1 *Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se dicen* **equivalentes por columnas** *o* **equivalentes por la derecha** *cuando se puede pasar de una a otra mediante un número finito de operaciones columna:*

$$A, B \text{ equivalentes por columnas} \quad \Longleftrightarrow \quad B = A \cdot \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_p.$$

Teniendo en cuenta que se puede pasar de operaciones columna a fila trasponiendo, todas las propiedades de la equivalencia por filas las cumple también la equivalencia por columnas:

1. *La equivalencia por columnas cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*

2. *Dos matrices equivalentes por columnas tienen la misma dimensión.*

3. *Dos matrices equivalentes por columnas tienen el mismo rango.*

   Observación: El recíproco no tiene porqué ser cierto.

Además el proceso análogo a la reducción por filas, nos permite definir y calcular la **forma canónica reducida respecto a equivalencia por columnas.**

3.1 Forma canónica reducida de una matriz respecto de la equivalencia de columnas.

Definición 3.2 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ el primer elemento no nulo de cada columna se llama* **elemento principal o pivote**

Definición 3.3 *Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ está* **en forma escalonada por columnas** *si el elemento principal de cada columna está más abajo que el elemento principal de la columna anterior.*

Definición 3.4 *Una* **forma canónica reducida por columnas***es una matriz $R \in \mathcal{M}_{m\times n}$ con las siguientes características:*

1. *Es una matriz escalonda por columnas.*

2. *El elemento principal de la columna, es uno.*

3. *A izquierda y derecha de los elementos principales de cada una de las columnas sĺo hay ceros.*

Algunos ejemplos de formas canónicas reducidas por columnas son (en rojo están marcados los elementos principales de cada fila):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forma canónica reducida por columnas de una matriz dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es una forma canónica reducida por columnas equivalente por filas a A. Intuitivamente, es la matriz más sencilla posible equivalente por columnas a la matriz dada. Puede probarse que la forma canónica reducida por columnas de una matriz A es única y de ahí el siguiente resultado:

Teorema 3.5 *Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ son equivalentes por columnas si y sólo si tienen la misma forma canónica reducida por columnas.*

3.2 Cálculo de la forma canónica reducida por columnas de una matriz dada.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se trata de aplicarle operaciones elementales columna hasta obtener su forma canónica reducida por columnas. Para ello se irán simplificando sucesivamente las filas de la matriz A. El procedimiento es el siguiente:

1. Si en la primera fila hay un elemento distinto de 0, lo llevamos a la posición $1,1$ mediante una cambio de columna μ_{1j}. Si todos los elementos son nulos, se pasa a la siguiente fila.

2. Ahora el elemento $a'_{1,1}$ de la posición $1,1$ se hace igual a 1 dividiendo la columna por su valor. La operación elemental es $\mu_1(\dfrac{1}{a'_{11}})$.

3. Se hacen ceros en la primera fila, a la derecha del 1 obtenido antes. Para ello sucesivamente se van haciendo las operaciones $\mu_{j1}(-a'_{j1})$.

4. Se vuelve a repetir el proceso análogo con la siguiente fila, teniendo en cuenta que cada vez que conseguimos una fila con un 1 y los demás elementos nulos, ésta no se volverá a modificar.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ veamos cual es su forma canónica reducida por columnas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\mu_{31}(-3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{\mu_2(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-7)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Equivalencia por columnas de una matriz cuadrada regular.

De forma análoga al caso de la equivalencia por filas, se pueden probar los siguientes resultados:

Teorema 3.6 *Si A es una matriz cuadrada regular n-dimensional entonces es equivalente por columnas a la matriz identidad.*

Corolario 3.7 *Si A es una matriz cuadrada regular n-dimensional entonces se descompone en transformaciones elementales columna.*

Corolario 3.8 *Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ son equivalentes por columna si y sólo si existe una matriz regular $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que:*

$$B = AQ.$$

Si A es una matriz cuadrada regular podemos calcular su inversa mediante operaciones columna:

$$\left(\frac{A}{I}\right) \longrightarrow \text{Operaciones columna} \longrightarrow \left(\frac{I}{A^{-1}}\right).$$

4 Equivalencia de matrices

4.1 Definición y propiedades.

Definición 4.1 *Dos matrices A, B se dicen* **equivalentes** *si se puede pasar de la una a la otra mediante un número determinado de opericiones fila y/o columna:*

$$B = H_p \cdot \ldots \cdot H_1 \cdot \ldots \cdot A \cdot \nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_q.$$

Teorema 4.2 *Dos matrices A, B son* **equivalentes** *si y sólo si exiten matrices cuadradas regular P, Q tales que:*

$$B = PAQ.$$

Prueba: Es consecuencia directa de los teoremas análogos vistos para equivalencia por filas y por columnas. ■

La equivalencia de matrices cumple las siguientes propiedades:

1. *La equivalencia de matrices cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*
2. *Dos matrices equivalentes tienen la misma dimensión.*
3. *Dos matrices equivalentes tienen el mismo rango.*

   Observación: Como veremos más adelante, en este caso el recíproco si es cierto, siempre y cuando las matrices sean de igual dimensión. Es decir **dos matrices son equivalentes si y sólo si tienen igual rango y dimensión**.

4.2 Formas reducidas en la equivalencia.

Teorema 4.3 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ una matriz cualquiera. A es equivalente a una de las siguientes matrices:*

$$I_r; \quad ó \quad \begin{pmatrix} I_r & \Omega \\ \Omega & \Omega \end{pmatrix}; \quad ó \quad \begin{pmatrix} I_r & \Omega \end{pmatrix}; \quad ó \quad \begin{pmatrix} I_r \\ \Omega \end{pmatrix}.$$

donde $r = rango(A)$. Estas matrices se llaman **formas canónicas** *de equivalencia.*

Prueba: Basta tener en cuenta que, haciendo operaciones elementales fila y columna sobre A, mediante los procesos descritos para la reducción por filas y por columnas siempre se llega a una de las matrices anteriores. ■

Corolario 4.4 *Dos matrices A y B son equivalentes si y sólo si tienen la misma dimensión y* **el mismo rango**.

5 Congruencia de matrices cuadradas.

5.1 Definición y propiedades.

Definición 5.1 *Dos matrices A y B cuadradas son* **congruentes** *si se pasa de A a B mediante un número finito de operaciones elementales fila y las mismas operaciones y en el mismo orden pero en columnas*

$$B = H_p \cdot \ldots \cdot H_1 \cdot A \cdot \nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_p \qquad con\ \nu_i = H_i^t.$$

Teorema 5.2 *Dos matrices A y B cuadradas son* **congruentes** *si y sólo si existe una matriz cuadrada regular Q verificando:*

$$B = Q^t \cdot A \cdot Q.$$

Prueba: Es consecuencia directa de que toda matriz regular Q se descompone en transformaciones elementales columna. La traspuesta Q^t se descompone en las mismas transformaciones elementales fila. ■

La congruencia de matrices cuadradas cumple las siguientes propiedades:

1. *La congruencia cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*
2. *Dos matrices congruentes son equivalentes.*
3. *Dos matrices congruentes tienen la misma dimensión.*
4. *El determinante de dos matrices reales congruentes tiene el mismo signo.*

   Prueba: Si A y B son congruentes, existe P regular con:

   $$B = Q^t A Q \quad \Rightarrow \quad det(B) = det(Q^t)det(A)det(Q) = det(A)det(Q)^2.$$

   En $\mathbb{R}$, $det(Q)^2 > 0$ y por tanto $det(A)$ y $det(B)$ son de igual signo.
5. *Dos matrices congruentes tienen el mismo rango.*

   Observación: El recíproco no es cierto. Por ejemplo las siguientes matrices tienen rango 2 pero no son congruentes:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2 Congruencia de matrices simétricas.

Teorema 5.3 *Toda matriz congruente con una matriz simétrica es simétrica.*

Prueba: Supongamos que A es simétrica y B es congruente con A. Entonces existe una matriz cuadrada regular P con:

$$B = PAP^t.$$

Veamos que B es simétrica, es decir, que verifica $B^t = B$:

$$B^t = (Q^tAQ)^t = Q^tA^tQ = Q^tAQ = B.$$

■

Teorema 5.4 *La condición necesaria y suficente para que una matriz cuadrada A sea diagonalizable por congruencia es que sea simétrica.*

Prueba:

"$\Longrightarrow$" Si A es diagonalizable por congruencia, entonces existe una matriz D diagonal congruente con A. Como D es simétrica A también lo es.

"$\Longleftarrow$" Supongamos que A es simétrica. Los pasos para diagonalizarla por congruencia son los siguientes:

1. Si algún elemento de la diagonal de A es no nulo (por ejemplo a_{kk}) lo llevamos a la posición 11, mediante las operaciones H_{1k} y ν_{1k}.

   Si todos los elementos de la diagonal de A son nulos, entonces tomamos cualquier otro elemento no nulo en otra posición i, j, y hacemos la operación $H_{ji}(1)$ y $\nu_{ji}(1)$ de manera que en la posición j, j conseguiremos un elemento distinto de cero. Ahora podemos aplicar el paso anterior.

   Si todos los elementos de A son nulos, hemos terminado de diagonalizar.

2. Utilizamos el elemento no nulo de A para hacer ceros en la primera fila y en la primera columna. Vamos haciendo la operación $H_{i1}(\frac{-a_{i1}}{a_{11}})$ y la análoga en columnas $\nu_{i1}(\frac{-a_{i1}}{a_{11}})$, para $i > 1$. Teniendo en cuenta que **la matriz es simétrica** conseguimos ceros en la primera fila y columna salvo en la posición $1, 1$.

3. Ahora repetimos todo el proceso sucesivamente con las otras filas y columnas, teniendo en cuenta que las filas y columnas que ya han sido reducidas no vuelven a ser modificadas y por tanto no se utilizan en el paso siguiente.

4. Al terminar el proceso habremos conseguido una matriz diagonal D congruente con A. ■

Observación 5.5 *En el proceso de diagonalización descrito en teorema anterior, podemos obtener la matriz Q^t que nos permite pasar de A a la diagonal D:*

$$D = Q^tAQ.$$

Podemos proceder de manera análoga a como lo hacíamos en la reducción por equivalencia:

$$(\, A \,|\; I\,) \longrightarrow \; \textit{Reducción por congruencia} \; \longrightarrow (\, D \,|\; Q^t\,)\,.$$

5.3 Formas canónicas de las matrices simétricas.

Teorema 5.6 *Sea A una matriz cuadrada simétrica sobre el cuerpo de los* **números complejos**. *Entonces A es congruente con una matriz de la forma:*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & \Omega \\ \hline \Omega & \Omega \end{array}\right).$$

donde $r = rango(A)$. A esta matriz se le llama **forma canónica por congruencia en $\mathbb{C}$.**

Prueba: Hemos visto que toda matriz cuadrada simétrica A es congruente con una diagonal D. Pero aun podemos hacer la siguiente simplificación. Para cada elemento d_{ii} no nulo de D hacemos las operaciones fila y columna $H_i(\frac{1}{\sqrt{d_{ii}}})$ y $\nu_i(\frac{1}{\sqrt{d_{ii}}})$. Siempre puede hacerse en el **cuerpo de los número complejos** porque en $\mathbb{C}$ siempre existen raíces cuadradas. De esta forma conseguimos una matriz congruente con A como la descrita en el enunciado del teorema. ■

Teorema 5.7 *Sea A una matriz cuadrada simétrica sobre el cuerpo de los* **números reales**. *Entonces A es congruente con una matriz de la forma:*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & \Omega & \Omega \\ \hline \Omega & -I_q & \Omega \\ \hline \Omega & \Omega & \Omega \end{array}\right),$$

donde $p + q = rango(A)$, $p, q \geq 0$. A esta matriz se le llama **forma canónica por congruencia en $\mathbb{R}$.**

Prueba: Procedemos como en el teorema anterior. El único problema es que ahora no existen raíces cuadradas reales de números negativos. Por tanto sobre la matriz D hacemos lo siguiente. Para cada elemento d_{ii} no nulo de D hacemos las operaciones fila y columna $H_i(\frac{1}{\sqrt{|d_{ii}|}})$ y $\nu_i(\frac{1}{\sqrt{|d_{ii}|}})$. De esta forma conseguimos una matriz congruente con A como la descrita en el enunciado del teorema. ■

6 Semejanza de matrices cuadradas.

Definición 6.1 *Dos matrices cuadradas A y B se dice que son* **semejantes** *si existe una matriz cuadrada regular P tal que:*

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

La semejanza de matrices cuadradas cumple las siguientes propiedades:

1. *La semejanza cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*
   - Reflexiva. Está claro que toda matriz es semejante a sí misma.
   - Simétrica. Si A y B son semejantes existe una matriz cuadrada regular P con:

$$B = P^{-1}AP \quad \Rightarrow \quad A = (P^{-1})^{-1}BP.$$

Y vemos que B y A son semejantes.

- Transitiva: Si A y B son semejantes por y B y C también, entonces existen matrices cuadradas regulares P, P':

$$\left.\begin{array}{r} B = P^{-1}AP \\ C = P'^{-1}BP' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad C = P'^{-1}P^{-1}APP' = (PP')^{-1}BPP'$$

donde PP' es una matriz cuadrada regular. Por tanto A y C son semejantes.

2. *Dos matrices semejantes son equivalentes.*

3. *Dos matrices semejantes tienen la misma dimensión.*

4. *Dos matrtices semejantes tienen el mismo determinante.*

   Prueba: Si $B = P^{-1}AP$:

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P|^{-1}|A||P| = |A|.$$

5. *Dos matrices semejantes tienen el mismo rango.*

   Observación: El recíproco no es cierto. Por ejemplo las siguientes matrices tienen rango 2 pero no son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7 Apéndice: Como escalonar una matriz.

7.1 Fórmula general:

Supongamos que tenemos una matriz:

$$\begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ p & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ q & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Entonces para hacer un cero sobre el elemento q de la fila j utilizando el elemento p de la fila i la operación a realizar es:

$$\boxed{H_{ji}\left(\frac{-q}{p}\right)}$$

El elemento p que utilizamos para hacer ceros debajo se llama **pivote**.

7.2 Ejemplo.

Vamos a escalonar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para comenzar queremos hacer un cero en la posición fila 2, columna 1 con el elemento de la fila 1, columna 1:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 1 \\ \boxed{3} & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos la operación $H_{21}\left(\frac{-3}{2}\right)$. Queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -3/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fijamos el siguiente objetivo: hacer un cero en la pimera columna de la fila 3 usando el primer elemento de la fila 1:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -3/2 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora la operación es $H_{31}\left(\frac{-1}{2}\right)$. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -3/2 \\ 0 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Una vez simplificada la primera columna, vamos con la segunda. Queremos utilizando el elemento de la fila 2, columna 2 hacer un cero en la fila 3, columna 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & -3/2 \\ 0 & \boxed{-2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ahora la operación (y en todo momento usamos la fórmula indicada al principio del documento) es $H_{32}\left(\frac{-(-2)}{-4}\right)$, es decir, simplificando $H_{32}\left(\frac{1}{-2}\right)$. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -3/2 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}$$

7.3 Matices.

En la fórmula general que se ha indicado al principio, $H_{ji}\left(\frac{-q}{p}\right)$, el caso más habitual es que $p = 1$, con lo cual no nos aparece una fracción y se nos facilitan las cuentas. Entonces uno puede a veces mediante un cambio de orden de filas forzar que el pivote sea 1, simplificando las operaciones.

Por ejemplo, en la matriz que escalonamos anteriormente un podría fijarse donde hay un 1 en la pimera columna:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y comenzar moviendo ese elemento a la primera fila, intercambiando las filas 1 y 3 realizando la operación elemental H_{13}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora la idea es la misma: queremos hacer un cero en la posición fila 2, columna 1 con el elemento de la fila 1, columna 1. Según la misma fórmula tenemos que hacer $H_{21}\left(\frac{-3}{1}\right)$, que simplificado queda $H_{21}(-3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

y luego un hacemos un cero en la tercera fila, $H_{21}\left(\frac{-2}{1}\right) = H_{21}(-2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego continuaríamos con la misma idea para hacer ceros bajo la diagonal en la segunda columna.

7.4 Ejemplo para diagonalizar por congruencia.

Exactamente la misma fórmula se emplea para diagonalizar una matriz simétrica por congruencia. Supongamos que queremos diagonalizar:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Queremos hacer un cero en la posición fila 2, columna 1 con el elemento de la fila 1, columna 1:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 6 \\ \boxed{4} & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Según la fórmula la operación a realizar es $H_{21}\left(\frac{-4}{2}\right)$ que simplificada queda $H_{21}(-2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \\ 6 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Por estar haciendo congruencia hacemos la misma operación columna $\mu_{21}(-2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \\ 6 & -12 & 20 \end{pmatrix}$$

Siguiente paso: hacer un cero en la tercera fila.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \\ \boxed{6} & -12 & 20 \end{pmatrix}$$

La operación a realizar es $H_{31}\left(\frac{-6}{2}\right) = H_{31}(-3)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & -12 & 2 \end{pmatrix}$$

Y una vez más repetimos la misma operación por columnas $\mu_{31}(-3)$.:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & -12 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora tendríamos que hacer ceros en la segunda columna usando el segundo elemento de la diagonal. Pero::

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & -12 \\ 0 & -12 & \boxed{2} \end{pmatrix} \qquad \text{El 0 no vale como pivote!.}$$

Buscamos para solucionarlo elementos no nulos en los siguientes de la diagonal. Lo encontramos en la tercera fila y así cambiamos de orden las filas 2 y 3 y las columnas 2 y 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & -12 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora si podemos usar el elemento de la fila 2 y columna 2 para hacer ceros debajo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -12 \\ 0 & \boxed{-12} & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula hay que hacer la operación $H_{32}\left(\frac{-(-12)}{2}\right) = H_{32}(6)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & -72 \end{pmatrix}$$

Y finalmente la misma operación en columnas $\mu_{32}(6)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -72 \end{pmatrix}$$