2. Combinatoria.

La combinatoria es la rama de las matemáticas que se ocupa de contar los elementos de un conjunto finito. Normalmente este conjunto corresponderá a las distintas estructuras que pueden formarse, combinando una serie de objetos bajo un determinado criterio.

1 Regla del producto.

Si realizamos una serie de elecciones en k etapas, de manera que en la etapa i-ésima tenemos n_i posibilidades, el número total de posibles elecciones es:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Expresado de otra forma, si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son conjuntos finitos no vacíos, el número de elementos del producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ es:

$$\#(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = \#A_1 \cdot \#A_2 \cdot \ldots \cdot \#A_k.$$

2 Variaciones.

2.1 Variaciones con repetición.

Las **variaciones con repetición** de n elementos tomados de p en p son cada una de las formas posibles en que podemos tomar p elementos ordenados (<u>repetidos o no</u>) elegidos en un conjunto de n elementos:

$$VR_{n,p} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{p \text{ veces}} = n^p.$$

2.2 Variaciones sin repetición.

Las **variaciones sin repetición** de n elementos tomados de p en p son cada una de las formas posibles en que podemos tomar p elementos ordenados (<u>sin repetir</u>) elegidos en un conjunto de n elementos:

$$V_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}_{p \text{ factores}} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

3 Permutaciones.

Las **permutaciones** de n elementos son cada una de las formas en que podemos ordenar esos elementos. Corresponden a las variaciones sin repetición de n elementos tomados de n en n:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

3.1 Permutaciones con repetición.

Las **permutaciones con repetición** de n elementos de los cuales hay grupos de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elementos iguales entre si, son cada una de las formas en que podemos ordenar esos elementos (los elementos de cada grupo son indistinguibles entre si):

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

4 Combinaciones.

4.1 Números combinatorios.

Definición 4.1 *Dados dos números enteros no negativos n, p, con $n \geq p$, definimos el* **número combinatorio "n sobre p"** *como:*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Algunas propiedades de los números combinatorios son:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
2. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$
3. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}.$

   Prueba:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} = \\
&= \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p+1}\right) = \\
&= \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\left(\frac{n+1}{p(n-p+1)}\right) = \\
&= \frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!} = \binom{n+1}{p}.
\end{aligned}$$

Una aplicación típica de los números combinatorios es el desarrollo de cuadrado de un binomio.

Teorema 4.2 (Binomio de Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad (a,\ b \in \mathbb{R},\ \ n \in \mathbb{N}).$$

Prueba:

Lo probamos por inducción.

- Para $n = 1$ es claro que:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1.$$

- Supongamos que es cierto para $n-1$ y probémoslo para n:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b)(\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k\, b^{n-1-k}) = \\
&= (\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1}\, b^{n-1-k}) + (\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k\, b^{n-k}) = \\
&= (\textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^k\, b^{n-k}) + (\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k\, b^{n-k}) = \\
&= b^n + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} (\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}) a^k b^{n-k} + a^n = \\
&= b^n + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + a^n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.
\end{aligned}$$

4.2 Combinaciones sin repetición.

Las **combinaciones** de n elementos tomados de p en p son cada una de las formas posibles de elegir p elementos de entre n posibles.

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{V_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

4.3 Combinaciones con repetición.

Las **combinaciones con repetición** de n elementos tomados de p en p son los grupos p elementos que se pueden formar con n **clases** de elementos.

$$CR_{n,p} = \binom{n+p-1}{p}.$$

5 Resumen.

Grupos de p elementos escogidos entre n posibles.		
Criterios.	PUEDEN REPETIRSE	NO PUEDEN REPETIRSE
IMPORTA EL ORDEN	**Variaciones con rep.** $VR_{n,p} = n^p$	**Variaciones sin rep.** $V_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$
NO IMPORTA EL ORDEN	**Combinaciones con rep.** $CR_{n,p} = \binom{n+p-1}{p}$	**Combinaciones sin rep.** $C_{n,p} = \binom{n}{p}$