Tema I

Preliminares.

1. Conjuntos y aplicaciones.

1 Conjuntos.

1.1 Definición y notación.

Definición 1.1 *Un* **conjunto** *es una colección de objetos llamados* **elementos**.

Utilizaremos la siguiente notación:

1. "$\exists$" significará "*existe*".
2. "$\exists^*$" significará "*existe un único*".
3. $:=$ " significará "*igual por definición*".
4. Denotaremos los conjuntos con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$.
5. Denotaremos los elementos con letras minúsculas $a, b, c, \ldots$.
6. Si a es un elemento de un conjunto A escribiremos $a \in A$ (ó $A \ni a$).
7. Si a NO es un elemento de un conjunto A escribiremos $a \notin A$ (ó $A \not\ni a$).
8. Si todos los elementos de un conjunto A están en B, escribiremos $A \subset B$ (ó $B \supset A$) y diremos que A es un *subconjunto* de B. Es claro por tanto que:

   $$A = B \iff A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

   Como consecuencia de esto un **método muy habitual para comprobar que dos conjuntos** A **y** B **coincidien será verificar primero que** $A \subset B$ **y luego que** $B \subset A$.
9. Denotaremos por $\emptyset$ al *conjunto vacío*, es decir, el que no tiene ningún elemento.
10. Dado un conjunto A denotaremos por $\mathcal{P}(A)$ al conjunto formado por todos los subconjuntos de A (se llama **partes de** A).
11. El número de elementos de un conjunto finito A se llama **cardinal del conjunto** y se denota por $\#A$.

1.2 Operaciones entre conjuntos.

Definición 1.2 *Dados dos conjuntos A y B se llama la* **unión** *de A y B al conjunto $A \cup B$ formado por todos los elementos de A y B:*

$$A \cup B = \{x | \, x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

Esta definición se extiende para n conjuntos (y en general para una familia arbitraria de conjuntos):

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x |\, x \in A_1 \text{ ó } x \in A_2 \text{ ó } \ldots \text{ ó } x \in A_n\}.$$

Definición 1.3 *Dados dos conjuntos A y B se llama la* **intersección** *de dos conjuntos A y B al conjunto $A \cap B$ formado por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos:*

$$A \cap B = \{x |\, x \in A \ ,\ x \in B\}.$$

De nuevo, esta definición se extiende para n conjuntos (y en general para una familia arbitraria de conjuntos):

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x |\, x \in A_1 \ ,\ x \in A_2 \ ,\ \ldots \ ,\ x \in A_n\}.$$

Definición 1.4 *Dados dos conjuntos A y X que cumplen que $A \subset X$, se llama conjunto* **complementario** *de A dentro de X al conjunto de elementos de X que no están en A:*

$$X \setminus A = \{x \in X |\, x \notin A\}.$$

Algunas propiedades de estas operaciones son:

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

   Prueba:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C \quad &\iff \left\{\begin{array}{c} x \in A \cup B \\ \text{y} \\ x \in C \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x \in A \text{ ó } x \in B \\ \text{y} \\ x \in C \end{array}\right\} \iff \\ &\iff \left\{\begin{array}{c} x \in A \text{ y } x \in C \\ \text{ó} \\ x \in B \text{ y } x \in C \end{array}\right\} \iff x \in (A \cap C) \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
3. $X \setminus (X \setminus A) = A$.
4. $A \subset B \quad \Rightarrow \quad X \setminus B \subset X \setminus A$.
5. **Leyes de De Morgan.** Si A, B dos conjuntos contenidos en otro conjunto X. Se verifica:

   $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. El complementario de la unión es la intersección de los complementarios.

   $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. El complementario de la intersección es la unión de los complementarios.

   Prueba: Probemos que $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. Para cualquier elemento $x \in X$ se tiene:

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cup B) \quad &\iff x \notin A \cup B \iff x \notin A \text{ y } x \notin B \iff \\ &\iff \left\{\begin{array}{c} x \in (X \setminus A) \\ \text{y} \\ x \in (X \setminus B) \end{array}\right\} \iff x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \end{aligned}$$

Definición 1.5 *Dados dos conjuntos A y B se llama* **producto cartesiano** $A \times B$ *al conjunto $A \times B$ formado por todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$:*

$$A \times B = \{(a, b)|\, a \in A\,,\, b \in B\}.$$

Esta definición generaliza para n conjuntos:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)|\, a_1 \in A_1\,,\, a_2 \in A_2\,, \ldots\,,\, a_n \in A_n\}.$$

Cuando todos los conjuntos son iguales su producto cartesiano se denota:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ veces}}.$$

2 Correspondencias.

2.1 Definiciones básicas.

Definición 2.1 *Dados dos conjuntos A y B, una* **correspondencia** *entre A y B es un subconjunto F del producto cartesiano $A \times B$. Además:*

1. *A se llama el* **conjunto inicial** *de la correspondencia.*
2. *B se llama* **conjunto final** *de la correspondencia.*
3. *Si $(a, b) \in F$ decimos que b es una* **imagen** *de a y que a es un* **origen** *de b.*
4. *El* **conjunto origen** *o* **dominio** *de F es el conjunto formado por todos los orígenes de los elementos de B:*

$$\textit{Conjunto origen de } F = \{a \in A|\, \exists y \in B \textit{ con } (a, y) \in F\}.$$

5. *El* **conjunto imagen** *o* **recorrido** *de F es el conjunto formado por todas las imágenes de los elementos de A:*

$$\textit{Conjunto imagen de } F = \{b \in B|\, \exists x \in A \textit{ con } (x, b) \in F\}.$$

Definición 2.2 *Dados dos conjuntos A y B y una correspondencia F entre A y B,* **la correspondencia inversa** F^{-1} *entre B y A se define como:*

$$F^{-1} = \{(b, a) \in B \times A|\, (a, b) \in F\}.$$

Se verifica que:

- Conjunto inicial de F=Conjunto final de F^{-1}.

- Conjunto final de F=Conjunto inicial de F^{-1}.

- Conjunto origen de F=Conjunto imagen de F^{-1}.

- Conjunto imagen de F=Conjunto origen de F^{-1}.

Definición 2.3 *Dados tres conjuntos A, B, C y dos correspondencias, F de A en B y G de B en C, se llama* **correspondencia** $H = G \circ F$ *a una correspondencia entre A y C definida como:*

$$H = \{(a, c) \in A \times C|\, \exists b \in B \textit{ con } (a, b) \in F \textit{ y } (b, c) \in G\}.$$

2.2 Aplicaciones

2.2.1 Definición.

Definición 2.4 *Una* **aplicación** *entre dos conjuntos A y B es una correspondencia verificando las siguientes condiciones:*

1. *El conjunto inicial coincide con el conjunto origen.*

$$\forall a \in A, \quad \exists b \in B |\, (a, b) \in F.$$

2. *Cada elemento del conjunto origen tiene una única imagen.*

$$\forall a \in C.Origen, \quad \exists^* b \in B |\, (a, b) \in F.$$

Ambas condiciones equivalen a que todo elemento del conjunto inicial tiene una única imagen.

$$\forall a \in A, \quad \exists^* b \in B |\, (a, b) \in F.$$

Denotaremos una aplicación F de A en B por $f : A \longrightarrow B$ y cuando $(a, b) \in F$ escribiremos $f(a) = b$. Si A' es un subconjunto de A, denotaremos por $f(A')$ al conjunto de todas las imágenes de los elementos de A':

$$f(A') = \{f(a) |\, a \in A'\}.$$

2.2.2 Clasificación de aplicaciones.

Dados dos conjuntos A y B, distinguieremos varios tipos de aplicaciones de A en B:

1. Una **aplicación inyectiva** es aquella en la que cada elemento de la imagen tiene un único origen. Para verificar la inyectividad de una aplicación suelen utilizarse cualquiera de las dos condiciones siguientes equivalentes:

$$\boxed{f \text{ inyectiva}} \iff \boxed{f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y} \iff \boxed{x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)}$$

2. Una **aplicación sobreyectiva** es aquella en la que el conjunto imagen coincide con el final:

$$\boxed{f \text{ sobreyectiva}} \iff \boxed{f(A) = B} \iff \boxed{\forall b \in B, \quad \exists a \in A |\, f(a) = b}$$

3. Una **aplicación biyectiva** es un aplicación que es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo, es decir, aquella en que todo elemento del conjunto final tienen un único origen:

$$\boxed{f \text{ biyectiva}} \iff \boxed{\begin{array}{l} f \text{ inyectiva} \\ f \text{ sobreyectiva} \end{array}} \iff \boxed{\forall b \in B, \quad \exists^* a \in A |\, f(a) = b}$$

2.2.3 Inversa de una aplicación.

Dada una aplicación f de A en B, siempre existe la correspondencia inversa f^{-1} pero **no siempre** esta inversa es una aplicación. Tenemos en cuenta que:

$$\begin{array}{rl} f^{-1} \text{ aplicación} & \iff \forall b \in B, \quad \exists^* a \in A|\, (b,a) \in F^{-1} \iff \\ & \iff \forall b \in B, \quad \exists^* a \in A|\, (a,b) \in F \iff \\ & \iff \forall b \in B, \quad \exists^* a \in A|\, f(a) = b \iff \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ inyectiva} \\ f \text{ sobreyectiva} \end{array} \right. \end{array}$$

Es decir:

Proposición 2.5 *Dada una aplicación f de A en B, la correspondencia inversa f^{-1} es una aplicación si y sólo si f es biyectiva.*

Como consecuencia de esto sólo podremos calcular la **aplicación inversa** de una aplicación biyectiva. Además esta aplicación inversa será también una aplicación biyectiva.

2.2.4 Composición de aplicaciones.

Definición 2.6 *Dados tres conjuntos A, B, C, y dos aplicaciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ definimos la* **aplicación f compuesta con g** *como:*

$$(a,c) \in g \circ f \iff \exists b \in B|\, (a,b) \in f \text{ y } (b,c) \in g,$$

o equivalentemente,

$$(g \circ f) : A \longrightarrow C \qquad (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

La equivalencia entre ambas definiciones es inmendiata sin más que tener en cuenta que:

$$(a,b) \in f \text{ y } (b,c) \in g \iff b = f(a) \text{ y } c = g(b) \iff c = g(f(a))$$

Además en la segunda definición queda claro que, por ser f y g aplicaciones, $g \circ f$ es efectivamente una aplicación ya que cada elemento de A tiene una única imagen definida en C.

Veamos algunas propiedades de la composición de aplicaciones. Supondremos que tenemos aplicaciones cualesquiera f, g, h, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$.

1. La **aplicación identidad** en un conjunto cualquiera A, $id_A : A \longrightarrow A$, que lleva cada elemento en si mismo, actúa como elementro neutro, es decir:

$$id_B \circ f = f; \qquad f \circ id_A = f.$$

2. Se cumple la propiedad **asociativa**, es decir:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

3. La composición **NO es conmutativa**.

4. Si $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva $f \circ f^{-1} = id_B$ y $f^{-1} \circ f = id_A$.
5. f y g inyectivas $\quad \Rightarrow \quad g \circ f$ es inyectiva.

   Prueba:

   $$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = g(f(y)) \overset{g \text{ inyct.}}{\Rightarrow} f(x) = f(y) \overset{f \text{ inyct.}}{\Rightarrow} x = y.$$

6. f y g sobreyectivas $\quad \Rightarrow \quad g \circ f$ es sobreyectiva.

   Prueba:

   $$(g \circ f)(A) = g(f(A)) \overset{f \text{ sobreyectiva}}{=} g(B) \overset{g \text{ sobreyectiva}}{=} C.$$

7. f y g biyectivas $\quad \Rightarrow \quad g \circ f$ biyectiva.
8. $g \circ f$ inyectiva $\quad \Rightarrow \quad f$ inyectiva.

   Prueba:

   $$f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = g(f(y)) \overset{(g \circ f) \text{ inyct.}}{\Rightarrow} x = y.$$

9. $g \circ f$ sobreyectiva $\quad \Rightarrow \quad g$ sobreyectiva.

   Prueba:

   $$f(A) \subset B \quad \Rightarrow \quad g(f(A)) \subset g(B) \overset{g \circ f \text{ sobre.}}{\Rightarrow} C \subset g(B) \overset{g(B) \subset C}{\Rightarrow} g(B) = C.$$

10. $g \circ f$ biyectiva $\quad \Rightarrow \quad f$ inyectiva y g sobreyectiva.