Algebra Lineal I. Curso 2019-2020. Soluciones a la Práctica voluntaria.

Sean $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8$ las ocho cifras de tu DNI$^{(1)}$. *Por ejemplo si el DNI es* 32478910, *entonces* $d_1 = 3$,$d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 7$, $d_5 = 8$, $d_6 = 9$, $d_7 = 1$, $d_8 = 0$.

Para cada i, con $1 \leq i \leq 8$ llamamos a_i al resto de d_i módulo 3, *es decir, el resto que se obtiene al dividir d_i por* 3. *En el ejemplo anterior* $a_1 = 0$,$a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $a_5 = 2$, $a_6 = 0$, $a_7 = 1$, $a_8 = 0$.

1. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_2+1 & a_3+1 \\ a_2+1 & 0 & 1 \\ a_3+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & a_4+1 & a_5+1 \\ a_4+1 & 0 & 1 \\ a_5+1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Con nuestro DNI las matrices quedan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) *Estudiar para que valores de λ las matrices A y B son congruentes.*

Recordemos que dos matrices simétricas son congruentes si y sólo si al ser digonalizadas por congruencia aparacen los mismos signos negativos y positivos en la diagonal.

Entonces diagonalizamos ambas matrices por congruencia para analizar tales signos. Para ello realizamos operaciones elementales fila y exactamente las mismas en columna. Comenzamos con la matriz A:

$$A \overset{H_{21}(-3)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-3)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-5/9)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-5/9)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -11/9 \end{pmatrix}$$

Los signos que aparecen en la diagonal son (el orden es indiferente) $+, -, -$. Ahora con la matriz B:

$$B \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-3)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & \lambda-9 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-5/4)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-5/4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-11/4 \end{pmatrix}$$

Para que aparezcan el mismo número de signos positivos y negativos en la diagonal en ambas matrices tiene que cumplirse que $\lambda - 11/4 < 0$.

Por tanto A y B son congruentes si y sólo si $\lambda < 11/4$.

(b) *Para $\lambda = 0$ hallar, si existe, una matriz inversible P tal que $PAP^t = B$.*

La condición $PAP^t = B$ para P inversible equivale a que las matrices A y B sean congruentes. Hemos visto en (i) que para $\lambda = 0$ las matrices A y B lo son; por tanto si existe la matriz P pedida.

Para calcularla realizamos sobre la identidad las mismas operaciones fila que hay que hacer para pasar de A a B. En concreto primero las que necesitamos para diagonalizar a A; luego para llegar a la misma forma diagonal obtenida para B; finalmente las operaciones de esta matriz diagonal hasta B (la inversa y en orden inverso de las operaciones que hicimos desde B hasta la diagonal).

La forma diagonal que obtuvimos de A es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -11/9 \end{pmatrix}$$

la de B (para $\lambda = 0$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -11/4 \end{pmatrix}$$

Los pasos para transformar la primera en la segunda son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -11/9 \end{pmatrix} A \overset{H_2(\sqrt{4/9})}{\longrightarrow} \overset{H_3(\sqrt{9/4})}{\longrightarrow} \overset{\mu_2(\sqrt{4/9})}{\longrightarrow} \overset{\mu_3(\sqrt{9/4})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -11/4 \end{pmatrix}$$

Para hallar P comenzamos haciendo sobre la identidad las operaciones filas realizadas sobre la matriz A:

$$Id \overset{H_{21}(-3)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-5/9)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1/3 & -5/9 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_2(2/3)}{\longrightarrow} \overset{H_3(3/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2/3 & 0 \\ -1/2 & -5/6 & 3/2 \end{pmatrix}$$

continuamos con la inversa (y en orden inverso) de las que habíamos realizado para pasar de B a su forma diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2/3 & 0 \\ -1/2 & -5/6 & 3/2 \end{pmatrix} \overset{(H_{32}(-5/4))^{-1}=H_{32}(5/4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2/3 & 0 \\ -3 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{(H_{21}(-2))^{-1}=H_{21}(2)}{\longrightarrow} \quad \overset{(H_{31}(-3))^{-1}=H_{31}(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

(c) *Dar una matriz simétrica 3×3, de rango 3, con todos sus elementos no nulos que no sea congruente con A. Justificar la respuesta.*

Escogemos una matriz diagonal que no sea congruente con A. Para ello basta que en la diagonal no tenga el mismo número de signos positivos que la forma diagonal de A $(+,-,-)$. Por ejemplo la matriz identidad. Luego la transformamos por congruencia para que sus elementos sean no nulos:

$$Id \overset{H_{21}(1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C.$$

2. *Se considera el espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de polinomios en una variable de grado menor o igual que 3. Sean los subconjuntos:*

$$U = \mathcal{L}\{a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3, a_3 + a_4x + a_5x^2 + a_6x^3, a_5 + a_6x + a_7x^2 + a_8x^3\}$$

$$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(a_3 - 1) = 0, \quad p'(a_4 - 1) = 0\}$$

Con los valores de los a_i obtenidos antes, los conjuntos quedan:

$$U = \mathcal{L}\{2x + x^2 + x^3, 1 + x + 2x^2, 2 + x^2\}$$

$$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(0) = 0, \quad p'(0) = 0\}$$

(a) *Probar que U y V son subespacios vectoriales.*

U está dado como la envolvente lineal de unos vectores. Sabemos en general que una envolvente lineal siempre es un subespacio vectorial luego en ese caso no hay nada que demostrar.

Para ver que B es subespacio tenemos que demostrar:

1) Contiene al vector cero, es decir al polinomio constante nulo $p_0(x) \in V$:

Pero $p_0'(x) = 0$ y entonces $p_0(0) = 0$ y $p_0'(0) = 0$ y por tanto efectivamente $p_0(x) \in V$.
2) Dados $p(x), q(x) \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hay que comprobar que $\alpha p(x) + \beta q(x) \in V$:
Como $p(x), q(x) \in V$ sabemos que $p(0) = p'(0) = q(0) = q'(0) = 0$. Entonces:

$$\alpha p(0) + \beta q(0) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0, \qquad \alpha p'(0) + \beta q'(0) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

y concluimos que $\alpha p(x) + \beta q(x) \in V$.

(b) *Dar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U, V, $U \cap V$ y $U + V$ respecto de la base canónica.*
La base canónica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ es:

$$C = \{1, x, x^2, x^3\}$$

de forma que un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tiene coordenadas $(a_0, a_1, a_2, a_3)_C$.
Entonces el subespacio U está generado por los vectores de coordenadas:

$$U = \mathcal{L}\{2x + x^2 + x^3, 1 + x + 2x^2, 2 + x^2\} = \mathcal{L}\{(0, 2, 1, 1)_C, (1, 1, 2, 0)_C, (2, 0, 1, 0)_C\}$$

Escalonamos la matriz de coordenadas de los generadores para ver que son independientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 1, 2, 0)_C, (0, 2, 1, 1)_C, (0, 0, -2, 1)_C\}$$

Las paramétricas quedan:

$$a_0 = \alpha, \qquad a_1 = \alpha + 2\beta, \qquad a_2 = 2\alpha + \beta - 2\gamma, \quad a_3 = \beta + \gamma.$$

Eliminando parámetros obtenemos que la implícita es:

$$a_0 + 3a_1 - 2a_2 - 4a_3 = 0.$$

Ahora, un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3)_C$ está en V si cumple $p(0) = 0$ y $p'(0) = 0$.
Pero $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$. Entonces:

$$\begin{array}{l} p(0) = 0 \iff a_0 = 0 \\ p'(0) = 0 \iff a_1 = 0 \end{array}$$

Por tanto las ecuaciones implícitas de V son:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 0.$$

El número de parámetros es:

$$dim(\mathcal{P}_4(\mathbb{R})) - \text{número de ecuaciones} = 4 - 2 = 2.$$

Resolviendo el sistema en función de 2 parámetros las paramétricas de V quedan:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \alpha, \quad a_3 = \beta.$$

Vamos ahora con $U \cap V$. Las implícitas de la intersección se obtienen uniendo las implícitas de ambos sub
es
pacios:

$$U \cap V \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_0 + 3a_1 - 2a_2 - 4a_3 = 0 \;\; \} \equiv U \\ \left. \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \end{array} \right\} \equiv V \end{array} \right.$$

Comprobamos que son independientes escalonando la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto las implícitas de $U \cap V$ son:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 + 2a_3 = 0.$$

El número de parámetros es:

$$dim(\mathcal{P}_4(\mathbb{R})) - \text{número de ecuaciones} = 4 - 3 = 1.$$

Las paramétricas quedan:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -2\lambda, \quad a_3 = \lambda.$$

En cuanto a la suma, por la fórmula de las dimensiones sabemos que:

$$dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = 3 + 2 - 1 = 4 = dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})).$$

Por tanto:

$$U + V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$$

es decir $U + V$ es TODO el espacio vectorial ambiente. No tiene ecuaciones implícitas y sus paramétricas son, por ejemplo:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta, \quad a_2 = \gamma, \quad a_3 = \delta.$$

(c) *Dar un subespacio vectorial W suplementario con V.*

Para que W y V sean suplementarios tienen que cumplirse que $W + V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $W \cap V = \{\vec{0}\}$. Equivalentemente que $dim(W) + dim(V) = dim(W + V) = dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$.

Hemos visto antes que $dim(V) = 2$ y a partir de las paramétricas que:

$$V = \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 0)_C, (0, 0, 0, 1)_C\}.$$

Por tanto $dim(W) = dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) - dim(V) = 4 - 2 = 2$. Basta tomar W generado por dos vectores independientes de los generadores de V de forma que $dim(W + V) = 4$. Por ejemplo:

$$W = \mathcal{L}\{(1, 0, 0, 0)_C, (0, 1, 0, 0)_C\}$$

y claramente:

$$W + V = \mathcal{L}\{\underbrace{(1, 0, 0, 0)_C, (0, 1, 0, 0)_C}_{W}, \underbrace{(0, 0, 1, 0)_C, (0, 0, 0, 1)_C}_{V}\} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$

(d) *Dar una polinomio $q(x) \notin V \cup W$ y su proyección sobre V paralelamente a W.*

Para escoger $q(x) \notin V \cup W$ basta tomar un polinomio que no esté ni en V ni en W; equivalentemente que no sea ni combinación lineal de los vectores que generan V, ni combinación lineal de los vectores que generan W.

Una forma cómoda de conseguir esto es tomar $q(x)$ como suma de vectores no nulos de V y W:

$$q(x) = \underbrace{(0, 0, 1, 0)_C}_{V} + \underbrace{(1, 0, 0, 0)_C}_{W} = (1, 0, 1, 0)_C = 1 + x^2.$$

El hecho de que V y W sean suplementarios y en particular que $V \cap W = \{\vec{0}\}$ garantiza que el vector así construido no está en ninguno de los dos subespacios.

Además ahora de esta misma descomposición se deduce que la proyección de $q(x)$ sobre V paralelamente a W es:

$$proyec_V(q(x)) = (0, 0, 1, 0)_C = x^2.$$

(e) *Probar que los vectores $B = \{x + x^2, 1, x^3, x - x^2\}$ son una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.*

Dado que B está formado por cuatro vectores y $dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) = 4$ para ver que son base es suficiente verificar que son independientes. Equivalentemente que la matriz de coordenadas tiene rango 4:

$$\begin{array}{l} x + x^2 \equiv (0,1,1,0)_C \\ 1 \equiv (1,0,0,0)_C \\ x^3 \equiv (0,0,0,1)_C \\ x - x^2 \equiv (0,1,-1,0)_C \end{array}$$

y

$$rango \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

(f) *Dar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U y V respecto de la base B.*

Usamos la expresión de cambio de base. Si llamamos $(b_0, b_1, b_2, b_3)_B$ a las coordenadas de un polinomio en la base B se tiene que:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_C = M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_B \iff \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_B, \qquad (*)$$

Ahora las ecuaciones implícitas en la base canónica de U y V son respectivamente:

$$a_0 + 3a_1 - 2a_2 - 4a_3 = 0$$

y

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 0.$$

Matricialmente pueden escribirse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_C = 0.$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_C = 0.$$

Aplicando la fórmula (*) obtenemos las implícitas de U y V en la base B:

$$U \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_B = 0 \iff b_0 + b_1 - 4b_2 + 5b_3 = 0$$

y

$$V \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_B = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} b_1 = 0 \\ b_0 + b_3 = 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo paramétricamente obtenemos las paramétricas; las de U:

$$b_0 = -\alpha + 4\beta - 5\gamma, \quad b_1 = \alpha, \quad b_2 = \beta, \quad b_3 = \gamma.$$

y las de V:

$$b_0 = -t, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = s, \quad b_3 = t.$$