MATRICES. GENERALIDADES Y RANGO.

Definición de matriz $m \times m$

- Una **matriz** es un conjunto de $m \times n$ elementos dispuestos en m **filas** y n **columnas**.
- Suelen denotarse con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{12} = elemento en fila 1 columna 2.

Rango de una matriz

- El rango es el máximo número de filas (o columnas) linealmente independientes de la matriz.
- El rango es el máximo tamaño de todas las submatrices cuadradas con determinante no nulo.

Cálculo por el método de orlado:

- Se busca una submatriz 1×1 con $det \neq 0$. Si no existe, hemos terminado y $rango = 0$. Si existe $rango \geq 1$ y continuamos.
- Se busca una submatriz 2×2 con $det \neq 0$, **añadiendo una fila y columna a la del paso anterior**.
  Si no existe, hemos terminado y $rango = 1$. Si existe $rango \geq 2$ y continuamos.
- Se busca una submatriz 3×3 con $det \neq 0$, **añadiendo una fila y columna a la del paso anterior**.
  Si no existe, hemos terminado y $rango = 2$. Si existe $rango \geq 3$ y continuamos.
- Así sucesivamente. Se termina cuando NO hemos encontrado submatriz con $det \neq 0$ ó agotamos filas ó columnas.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad |1| = 1 \neq 0, \ \checkmark$

, (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ✗$, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \ \checkmark$

(*iii*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ ✗$, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ ✗ \quad \boxed{rango(A) = 2}$

Cálculo por Gauss:

Escalonar: $\begin{cases} \text{Intercambiar filas} \\ \text{Multiplicar/dividir fila por un número (para conseguir unos)} \\ \text{Sumar a una fila un múltiplo de otra (hacer ceros)} \end{cases}$

$$\boxed{Rango = \begin{array}{l} \textbf{Número de filas no nulas} \\ \text{de la forma escalonada.} \end{array}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boxed{rango(A) = 2}$$

Matrices especiales

- **Matriz cuadrada:** Matriz con el mismo número de filas y columnas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{cuadrada} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{NO cuadrada}$$

- **Matriz fila:** Matriz con una sola fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz columna:** Matriz con una sola columna.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal:** Matriz con ceros fuera de la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular superior (inferior):** Matriz con ceros debajo (encima) de la diagonal.

$$\underset{\text{Triangular superior}}{\begin{pmatrix} 9 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \qquad\qquad \underset{\text{Triangular inferior}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}}$$

- **Matriz identidad I:** Matriz cuadrada con unos en la diagonal y cero en el resto.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica:** Matriz cuadrada que coincide con su traspuesta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de matrices $A+B$

Se suman matrices del mismo tamaño sumando elementos en la misma posición.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+3 & 1+0 \\ 3+(-1) & 4+2 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Conmutativa: $A+B=B+A$.
- Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$.
- Elemento neutro: Matriz nula 0: $0+A=A+0=A$.
- Elemento opuesto: $-A$, $A+(-A)=(-A)+A=0$.

Producto de un número por una matriz $k \cdot A$

Se multiplican todos los elementos de la matriz por el número.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $k \cdot (A+B) = k \cdot A + k \cdot B$.
- $(k+t) \cdot A = k \cdot A + t \cdot A$.
- $(k \cdot t) \cdot A = k \cdot (t \cdot A)$.
- $1 \cdot A = A$.

Producto de dos matrices $A \cdot B$

El número de columnas de la primera matriz debe de coincidir con el número de filas de la segunda.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 3} = \begin{array}{ccc} 1^{\underline{a}} \text{ fila} \times 1^{\underline{a}} \text{ columna} & 1^{\underline{a}} \text{ fila} \times 2^{\underline{a}} \text{ columna} & 1^{\underline{a}} \text{ fila} \times 3^{\underline{a}} \text{ columna} \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 0+(-1)\cdot 2+1\cdot 3 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 1+1\cdot 1 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 3+1\cdot 0 \\ 3\cdot 0+0\cdot 2+1\cdot 3 & 3\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1 & 3\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

$$\begin{array}{ccc} 2^{\underline{a}} \text{ fila} \times 1^{\underline{a}} \text{ columna} & 2^{\underline{a}} \text{ fila} \times 2^{\underline{a}} \text{ columna} & 2^{\underline{a}} \text{ fila} \times 3^{\underline{a}} \text{ columna} \end{array}$$

FILAS POR COLUMNAS

Propiedades:

- Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
  $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B$.
- Distributiva: $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$
  $(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.
- Elemento neutro. $A \cdot I = I \cdot A = A$.

¡CUIDADO!

En general **el producto no es conmutativo**:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.
- $(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$.
- $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$.