

DETERMINANTES. CÁLCULO Y PROPIEDADES.

Cálculo de determinantes (I)

Determinante 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinante 3×3 . Regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \text{d} & \text{e} & \text{f} \\ \text{g} & \text{h} & \text{i} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \text{d} & \text{e} & \text{f} \\ \text{g} & \text{h} & \text{i} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \text{d} & \text{e} & \text{f} \\ \text{g} & \text{h} & \text{i} \end{vmatrix} - (\text{ceg} + \text{bdi} + \text{fha})$$

Cálculo de determinantes (II)

Adjunto de un elemento:

A_{ij} = **adjunto** del término en la fila i columna j = $(-1)^{i+j}$ **determinante** de la matriz al **quitar fila i y columna j**

Signos:

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{5} & 0 \\ 2 & \cancel{4} & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 6 - 0 \cdot 2) = -18$$

Determinante por adjuntos:

Se elije una fila (ó columna): el determinante es la suma de los elementos de la fila (ó columna) multiplicados por sus adjuntos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 5 \cdot A_{22} + 4 \cdot A_{32} = 0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right) + 5 \cdot \left(+ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right) + 4 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = 0 + 10 + 24 = 34.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{31} + 4 \cdot A_{32} + 6 \cdot A_{33} = 2 \cdot \left(+ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \right) + 4 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) + 6 \cdot \left(+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right) = -20 + 24 + 30 = 34.$$

Propiedades de los determinantes (línea=fila ó columna)

- El determinante de la identidad es 1. $|I| = 1$
- Al transponer el determinante no varía:

$$|A^t| = |A|$$

- El determinante de la inversa es la inversa del determinante:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

- Determinante del producto es producto de determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

- Si A es $n \times n$, $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de su diagonal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6. \quad \begin{vmatrix} 9 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 \cdot 2 = 36.$$

- El determinante de una matriz diagonal es el producto de su diagonal.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6.$$

- Si tiene una línea de ceros, el determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Si tiene dos líneas iguales o proporcionales, el determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- Si una línea es combinación lineal de las otras, el determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- Si se permutan dos líneas el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

- Si a una línea se le suma un múltiplo de otra el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 + (-2) \cdot 1 & 2 \\ 2 & 5 + (-2) \cdot 2 & 1 \\ 2 & 4 + (-2) \cdot 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

- Si una línea se multiplica por k , el determinante se multiplica por k .

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Si una línea es suma de dos, el determinante se descompone en suma de dos determinantes, con las otras líneas invariantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & x+2 \\ 1 & y+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

¡CUIDADO!

Si A, B son matrices $n \times n$:

- $|A + B| \neq |A| + |B|$.
- $|-A| \neq |A|$ (es $|-A| = (-1)^n |A|$)
- $|kA| \neq k|A|$ (es $|kA| = k^n \cdot |A|$)