Ejercicios del Tema 2: Estructuras algebraicas básicas

En los ejercicios 1, 2, 8 y 9 se utilizará que si G = {$g_1,...,g_n$} es un conjunto finito y * una operación interna definida en G, podemos utilizar una tabla de doble entrada con tantas filas y columnas como elementos tenga G para representar la operación. Así, la entrada correspondiente a la fila i-ésima y la columna j-ésima de la tabla será el elemento $g_i * g_j$. La tabla puede ser útil para determinar si * es conmutativa (la tabla es simétrica), si hay elemento neutro (su fila y su columna contienen los elementos de G en el mismo orden en el que aparecen en la fila superior y en la columna de la izquierda). También podemos buscar el simétrico de un elemento x buscando en su fila y su columna el elemento neutro de *; el elemento correspondiente a la columna donde hayamos encontrado al neutro es el simétrico de x.

*	g_1	...	g_j	...	g_n
g_1					
...					
g_5			g_5*g_j		
...					
g_n					

Nótese que si (G,*) es un grupo, cada elemento de G aparece una y una única vez en cada fila y cada columna de la tabla.

1. Completa la tabla siguiente, sabiendo que (G = {a ,b c},*) es un grupo:

*	a	b	c
a	a	b	c
b			
c			

Viendo la tabla, deducimos que el elemento neutro de G es a*, con lo que completamos la primera columna*

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b		
c	c		

Puesto que un elemento no puede aparecer repetido en ninguna fila y en ninguna columna, completamos la segunda fila y la tercera fila, y queda

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

2. Considera la tabla correspondiente a la operación * definida en G = {e, a ,b ,c} por

**	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	a	e	e
b	b	e	b	e
c	c	e	e	c

¿es G un grupo?

Viendo que (a * b) * c = e * c = c $\neq$ a = a * e = a * (b * c), *deducimos que la operación no es asociativa y, por lo tanto, no se trata de un grupo.*

3. Si $\mathbf{Q}^+$ es el conjunto de los racionales estrictamente positivos, demuestra que ($\mathbf{Q}^+$, **.**) es un grupo. ¿Es cierto lo mismo para los racionales estrictamente negativos?

($\mathbf{Q}^+$, **.**) *es un grupo ya que el producto de dos racionales estrictamente positivos es estrictamente positivo (operación interna), el elemento neutro es el* 1, *y el inverso de cada* x > 0 *es* (1/x) > 0.
La operación deja de ser interna al multiplicar dos enteros negativos, basta tomar (–1)(–2) = 2 > 0.

4. Sea (G, *) un grupo con e su elemento neutro. Demuestra que:
a) $e^{-1} = e$
b) Si g es un elemento de G, se tiene que $(g^{-1})^{-1} = g$
c) Si g, h son dos elementos de G, se verifica que $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$
d) G es conmutativo si, y sólo si, $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$, para cualesquiera a, b elementos de G.

a) El inverso de cada x de G *es el único elemento y tal que x * y = y * x = e. Puesto que e * e = e, se tiene que* $e^{-1} = e$.
b) Se deduce de la unicidad del inverso y de que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.
c) Para demostrarlo, téngase en cuenta que $(g * h) * (h^{-1} * g^{-1}) = e$ *y que* $(h^{-1} * g^{-1}) * (g * h) = e$.
d) Si G es conmutativo, es claro que $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1} = g^{-1} * h^{-1}$. *Y, por otra parte, como sabemos que* $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$, *se concluye que* $g^{-1} * h^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$, *es decir,* G *es conmutativo*.

5. Sea (G,*) un grupo finito con un número par de elementos y sea e su elemento neutro. Demuestra que hay algún elemento $g \neq e$ tal que $g = g^{-1}$.

La clave está en darse cuenta de que el subconjunto $B = \{x \in G / x \neq x^{-1}\}$ *es necesariamente de cardinal par. Puesto que* $G = B' \cup B = \{x \in G / x = x^{-1}\} \dot{\cup} B$, *si* G *es de cardinal par, tendremos que* B' *tiene un número par de elementos y el elemento neutro e siempre pertenece a* B', *por lo que* B' *contiene al menos otro elemento distinto de e*.

6. Se consideran en **Q** las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ definidas por:
$a \oplus b = a + b - k$ y $a \otimes b = a + b - (ab / m)$, para a y b números racionales.
Determina el valor de k y m para que
a) el elemento neutro de $\oplus$ sea 3.
b) el simétrico de 6 respecto a $\oplus$ sea –9.
c) el simétrico de 2 respecto a $\otimes$ sea 1/8.

a) Si e es el elemento neutro de $\oplus$, *entonces* $a \oplus e = a$, *para todo a racional, es decir,* $a + 3 - k = a$. *Por lo tanto,* $k = 3$.
b) Se observa primero que el elemento neutro de $\oplus$ *es k. Si –9 es el simétrico de 6 respecto a* $\oplus$, *se verifica que* $6 \oplus 9 = 6 - 9 - k = -3 - k$ *ha de ser igual a k, con lo que* $k = -3/2$.

c) Veamos primero cuál es el elemento neutro f respecto a $\otimes$. Puesto que $a \otimes f = a$, para todo racional a, se necesita que $a + f + (af / m) = a$. Si particularizamos en $a = 0$, nos queda que necesariamente $f = 0$. Si ahora queremos que $2 \otimes 1/8 = 0$, estamos imponiendo que $2 + 1/8 + 1/4m = 0$ y, resolviendo la ecuación correspondiente, nos queda que $m = -2/17$.

7. Determina si cada uno de los siguientes subconjuntos de números enteros es un anillo con la suma y el producto usuales:
a) $R = \{x \in \mathbf{Z} / x \geq 0\}$
b) $R = \{x \in \mathbf{Z} / x \text{ es par}\}$
c) $R = \{3n / n \in \mathbf{Z}\}$

a) No es un anillo porque R con la suma no es un grupo ya que el simétrico de $x > 0$ es $-x$, que no pertenece a R.
b) Es un anillo porque tanto la suma como el producto de dos números pares es un número par. Sin embargo, no es un anillo unitario ya que el 1 no es par.
c) Razonando igual que en el apartado anterior, se demuestra que R es un anillo.

8. Sea (R = {s, t, x, y}, +, **.**) un anillo con tablas dadas por:

+	s	t	x	y
s	y	x	s	t
t	x	y	t	s
x	s	t	x	y
y	t	s	y	x

.	s	t	x	y
s	y	y	x	x
t	y	y	x	x
x	x	x	x	x
y	x	x	x	x

a) ¿Cuál es el "cero" de este anillo?
b) ¿Cuál es el simétrico de cada elemento respecto de la operación +?
c) ¿Cuánto vale s**.**(t + x**.**y)?
d) ¿Es R un anillo conmutativo?
e) ¿Tiene R elemento neutro respecto a **.**?
f) Encuentra un par de divisores de cero en este anillo.

a) El 0 de este anillo es x, tal y como se deduce de la tabla de la operación suma (+).
b) –s = t, –t = x, – y = y
c) s**.**(t + x**.**y) = s**.**t + x = s**.**t = *y*
d) La tabla del producto es simétrica, por lo que esta operación es conmutativa.
e) Puesto que en la tabla del producto no hay ninguna fila en la que aparezcan los elementos de R (en el mismo orden), no hay elemento neutro para el producto.
f) Nótese que t**.**y = x*, siendo ambos elementos* (t, y) *distintos de* x.

9. Sabiendo que (R = {s, t, x, y}, +, **.**) es un anillo, completa las tablas dadas por:

+	s	t	x	y
s	s	t	x	y
t	t	s	y	x
x	x	y	s	t
y	y	x	t	s

.	s	t	x	y
s	s	s	s	s
t	s	t		
x	s	t		y
y	s		s	

a) ¿Es conmutativo este anillo?
b) ¿Tiene elemento neutro respecto a **.**?

Completemos la tabla de la segunda operación (**.**) *en primer lugar.*

$x^2 = (t + y).x = x.t + x.y = t + y = x$
$t.x = (x + y).x = x^2 + y.x = x + s = x$
$y.t = (x + t).t = x.t + t^2 = t + t = s$
$t.y = t.(x + t) = t.x + t^2 = x + t = y$
$y^2 = y.(x + t) = y.x + y.t = s + s = s$

Al completar la tabla queda:

.	s	t	x	y
s	s	s	s	s
t	s	t	x	y
x	s	t	x	y
y	s	s	s	s

Puesto que t.x = x *y* x.t = t, *queda claro que* R *no es conmutativo.*
La tabla nos dice que no hay ningún elemento e *en* R *tal que* r.e = e.r = r, *para todo* r *de* R.

10. ¿Son subespacios vectoriales los siguientes subconjuntos?

a) $W = \{(x, y) \in R^2 \ ; x + y = 0\}$
b) $U = \{(x,0) \ ; x \in R\}$
c) $V = \{(x, y) \in R^2 \ ; x + y = 1\}$

Recordemos que un subconjunto no vacío U de un espacio vectorial V es un subespacio vectorial, si dados dos vectores u y v de U y dos escalares a y b, se tiene que a.u+b.v es un vector de U. Es evidente que los tres conjuntos U, V y W son no vacíos. Además, si u = (x,y) y v = (x',y') son dos vectores de W y a y b son dos números reales, se tiene que:

$$au+bv = (ax+bx',ay+by')$$

es un vector de W, ya que:

$$ax + bx' + ay + by' = a(x + y) + b(x' + y') = 0+0.$$

Por otro lado, V no es un subespacio ya que $(0,1) \in V$, $(1,0) \in V$ pero $(0,1)+(1,0)=(1,1) \notin V$. Finalmente, si (x,0) y (x',0) son dos vectores de U, y a y b son dos números reales, se tiene que $a(x,0)+b(x',0) = (ax+bx',0) \in U$.

11. Demuestra que si U y W son dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V, la intersección $U \cap W$ es un subespacio vectorial de V. ¿Ocurre lo mismo con la unión $U \cup W$?

Si U y W son dos subespacios de V, es claro que el "cero" de V, 0 pertenece a ambos, luego $U \cap W$ es no vacío. Por otro lado, si u y v son dos vectores de $U \cap W$ y a y b son dos escalares, de tiene que $au+bv \in U$ (por ser U subespacio) y $au+bv \in W$ (por ser W subespacio), es decir, $au+bv \in U \cap W$.
Con la unión, no ocurre lo mismo. Basta tomar $U=\{(x,0) ; x \in R\}$ y $W=\{(0,x) ; x \in R\}$ subespacios de R^2. Es claro que $U \cup W$ no es un subespacio por que $(1,0) \in U \subseteq U \cup W$, $(0,1) \in W \subseteq U \cup W$, pero $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin U \cup W$.

12. El conjunto V de aplicaciones de R en R es un espacio vectorial con la suma definida por:

$$(f + g)(x)=f(x) + g(x), \text{ si x es un número real}$$

y siendo el producto por escalares:

$$(a.f)(x) = a\, f(x).$$

Decide si los siguientes subconjuntos de V son o no subespacios vectoriales de V.
a) $U = \{ f \in V ; f(1) = 0\}$
b) $L = \{ f \in V ; f(1) = 2\}$
c) $W = \{ f \in V ; f(-x) = -f(x)\}$

Todos los subconjuntos considerados son no vacíos, basta tomar la función constante cero, la función constante 2 y la función identidad (todas de R en R).
Si f y g son dos funciones de U y a y b son dos números reales, se tiene que $a f + b g$ es una función de U, ya que $(a f + b g)(1) = a f(1)+b g(1) = 0+0 = 0$. Análogamente, si f y g son dos aplicaciones de W, entonces

$$(af+bg)(-x) = af(-x)+bg(-x)= - af(x)-bg(x) = -(af+bg)(x),$$

es decir $af +bg \in W$. Así pues, U y W son subespacios vectoriales de V, mientras que L no, ya que la función constante cero (que es el vector cero de V) no es un elemento de L.

13. Sea V un espacio vectorial y u, v y w tres vectores de V tales que:
$a.u + b.v + c.\, w = 0$, siendo $ab \neq 0$. Demuestra que el subespacio engendrado por u y w es el mismo que el generado por v y w, es decir,

$$<u, w> = <v, w>$$

Si $ab \neq 0$, entonces $a \neq 0$ y $b \neq 0$, con lo que:

$$u = (-b/a)\, v + (-c/a)\, w.$$

Si tomamos un vector $z = \alpha u + \beta w \in <u, w>$, se tiene que:

$$z = (-\alpha b/a)v + (\beta-\alpha c/a)\, w \in <v, w>, \text{ es decir}$$

$$<u, w> \subseteq <v, w>.$$

El otro contenido se demuestra de manera análoga.

14. En R^3 se consideran los vectores u = (1,0,1), v = (0,-1,1) y w = (2, 1,1). Demuestra que:

$$<u, w> = <v, w >.$$

Basta aplicar el ejercicio anterior teniendo en cuenta que:

$$2(1,0,1) + (-1)\,(0,-1,1) + (-1)\,(2, 1,1) = (0,0,0).$$

15. Calcula la dimensión de W, siendo W el subespacio:

a) $W =\{(x, y) \in R^2 ; x + y = 0\}$

b) $W =\{(x, y, z) \in R^3 ; x + y + z = 0\}$

En el caso de $W = \{(x, y) \in R^2 \; ; x + y = 0\}$*, se tiene que* $(x, y) \in W \Leftrightarrow y = -x$*. Por lo tanto,*

$$W = \{(x, -x) \; ; x \in R\} = \{x(1, -1) \; ; x \in R\} = < (1,-1)>,$$

Por lo que $\{(1,-1)\}$ *es una base de W y dim (W)=1.*

Si ahora consideramos $W = \{(x, y, z) \in R^3 \; ; x + y + z = 0\}$*, entonces*

$$(x, y, z) \in W \Leftrightarrow z = -(x + y).$$

Por lo tanto

$$W = \{(x, y, -(x + y)) \; ; x, y \in R\} = \{ x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \; ; x, y \in R \} = < (1,0,-1),(0,1,-1)>$$

Como $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ *son dos vectores linealmente independientes que generan W, forman una base de W y dim (W)=2.*