Ejercicios del Tema 1: Introducción a la teoría de conjuntos

1. Determina si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes. Explica brevemente la respuesta.

a) $\emptyset \subseteq \emptyset$	**b)** $\emptyset \in \emptyset$
c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$	**d)** $\emptyset \in \{\emptyset\}$
e) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$	**f)** $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
g) $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$	**h)** $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$
i) $\mathbf{N} \in \mathbf{Z}$	**j)** $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$
k) $\{2\} \in \mathbf{P}(\mathbf{Z})$	**l)** $\{2\} \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{Z})$

Puesto que $\emptyset \subseteq A$, siendo A cualquier conjunto, es claro que a) y c) son verdaderas. Como además el conjunto vacío no tiene elementos, b) es falsa. Finalmente, d) es verdadera ya que $\{\emptyset\}$ es un conjunto unitario cuyo único elemento es $\tilde{\emptyset}$

Recordemos que, si A y B son dos conjuntos cualesquiera, se dice que $A \subseteq B$ si todos los elementos de A son elementos de B. Así, el apartado e) es cierto y el g) es falso ya que $\emptyset \in \{a, \emptyset\}$, pero $\emptyset \notin \{a, \{a, \emptyset\}\}$. Por otro lado, es claro que f) es falsa ya que $\{a, b\}$ no es uno de los cuatro elementos del conjunto $\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$. Sin embargo, es claro que $\{a, \emptyset\}$ es uno de los elementos del conjunto $\{a, \{a, \emptyset\}\}$ y, en consecuencia, h) es verdadera.

Por otra parte, i) es falsa ya que el conjunto de los números naturales no es un número entero, mientras que j) es verdadera ya que todo número natural es entero. Finalmente, y recordando que si A y B son dos conjuntos, $A \in \mathbf{P}(B)$ si, y sólo si, $A \subseteq B$, es claro que k) es verdadera (2 es un elemento de $\mathbf{Z}$). Fijémonos que k) es equivalente a $\{2\} \subseteq \mathbf{Z}$. Argumentando de modo similar, obtenemos que l) es falsa ya que $2 \notin \mathbf{P}(\mathbf{Z})$ (ni siquiera 2 es un conjunto).

2. Demuestra que si $A \cap C \subseteq B \cap C$ y $A \cap C' \subseteq B \cap C'$, entonces $A \subseteq B$ (C' es el complementario de C).

El resultado es consecuencia de que, dado cualquier par de subconjuntos Y, Z de un conjunto arbitrario X, se verifica que:

$$Y = Y \cap X = Y \cap (Z \cup Z') = (Y \cap Z) \cup (Y \cap Z')$$

Entonces, es claro que $A = (A \cap C) \cup (A \cap C') \subseteq (B \cap C) \cup (B \cap C') = B$.

3. **a)** ¿Si $A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$?
b) ¿Si $A \cap B = A \cap C$, entonces $B = C$?
c) ¿Si $A \oplus B = A \oplus C$, entonces $B = C$?

a) *No necesariamente, piénsese, por ejemplo, que* B *y* C *sean dos subconjuntos distintos de* A. *En este caso,* $A = A \cup B = A \cup C$ *con* $B \neq C$. *Tómense, por ejemplo,* $A = \{x, y\}$ *y* $B = \{x\}$, $C = \{y\}$.
b) *Si tomamos* A *un subconjunto de dos conjuntos distintos cualesquiera* B y C, *se tiene que* $A = A \cap B = A \cap C$ *con* $B \neq C$. *Por ejemplo, para* $A = \{y\}$ *y* $B = \{x, y\}$, $C = \{y, z\}$.
c) *En este caso, la respuesta es afirmativa debido a que, si* $x \in B$, *puede que* $x \in A$ *o que* $x \notin A$.
- Si $x \in A$, *entonces* $x \in A \cap B$, *por lo que* $x \notin A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
Puesto que $A \oplus B = A \oplus C$ *y* $x \in A \subseteq A \cup C$, *tenemos que* x *ha de pertenecer necesariamente a* $A \cap C$ *y, en consecuencia. a* C.
- Si $x \notin A$, *entonces* $x \notin A \cap B$ *y, puesto que* $x \in B \subseteq A \cup B$, *se tiene que*
$x \in A \oplus B = A \oplus C = (A \cup C) - (A \cap C)$. *De este modo, tenemos que x debe pertenecer a* $A \cup C$ *y, por lo tanto, a* C, *ya que estamos suponiendo que no está en* A.
De la misma forma, se obtiene que $C \subseteq B$.

4. ¿Qué se puede afirmar de los conjuntos P y Q si
a) $P \cap Q = P$? **b)** $P \cup Q = P$? **c)** $P \oplus Q = P$? **d)** $P \cap Q = P \cup Q$?

Puesto que $P \cap Q \subseteq Q$ y $Q \subseteq P \cup Q$, *de a) se deduce que* $P \subseteq Q$ *y de b) que* $Q \subseteq P$. *Es evidente que, si se verifica d) se sigue que* $P \subseteq P \cup Q = P \cap Q \subseteq Q \subseteq P \cup Q = P \cap Q \subseteq P$, *es decir* $P = Q$. *Finalmente, puesto que* $P \oplus \emptyset = (P \cup \emptyset) - (P \cap \emptyset) = P$ *y, teniendo en cuenta el apartado c) del ejercicio 3, se obtiene que* $Q = \emptyset$, *en el caso de que* $P \oplus Q = P$.

5. Denotemos por X el conjunto de todos los estudiantes de primer curso de la Facultad de Ciencias, con Y el conjunto de todos los de segundo curso de la misma facultad, con A el conjunto de los estudiantes de

Química, con B el conjunto de los estudiantes de Física, con C el conjunto de los estudiantes del curso de Mecánica, con D el de todos los que fueron al concierto el lunes por la noche y con E el de todos los que se acostaron tarde el lunes por la noche. Expresa las afirmaciones siguientes en notación de teoría de conjuntos:

a) Todos los estudiantes de primero de Química cursan Mecánica.

b) Aquellos, y sólo aquellos, que están en el curso de Mecánica o que fueron al concierto, se acostaron tarde el lunes.

c) Ningún estudiante del curso de mecánica fue al concierto (la razón obvia es la cantidad de problemas que dejan en el curso).

d) El concierto fue sólo para estudiantes de primero y segundo.

e) Todos los estudiantes de segundo curso que no son de Física ni de Química, fueron al concierto.

a) $\forall$ x $\in$ A $\cap$ X $\Rightarrow$ x $\in$ C, *es decir,* A $\cap$ X $\subseteq$ C.
b) $\forall$ x, x $\in$ C $\cup$ D $\Leftrightarrow$ x $\in$ E, *es decir,* C $\cup$ D = E.
c) $\forall$ x, x $\in$ C $\Rightarrow$ x $\in$ D', *es decir,* C $\cap$ D = $\emptyset$.
d) $\forall$ x, x $\in$ D $\Rightarrow$ x $\in$ X $\cup$ Y, *es decir,* D $\subseteq$ X $\cup$ Y.
e) $\forall$ x, x $\in$ Y $\cap$ A' $\cap$ B' $\Rightarrow$ x $\in$ D, *es decir,* Y $\cap$ A' $\cap$ B' $\subseteq$ D.

6. Dado cualquier subconjunto $X \subseteq$ A = {1, 3, 5, 7, 9}, llamaremos S(X) a la suma de los elementos de X (por ejemplo, S({1, 9}) = 10 = S({3, 7} y, por convenio, S($\emptyset$) = 0). ¿Cuántos subconjuntos X de A verifican que S(X) es estrictamente mayor que 4? Analiza si la aplicación de **P**(A) a **Z** definida por S es inyectiva.

Los únicos subconjuntos de A *tales que* S(X) $\leq$ 4 son X = $\emptyset$, X = {1}, X = {3} y X = {1,3}. *Así, la respuesta a la primera pregunta es* | **P**(A) | – 4 = 2^5 – 4 = 32 – 4 = 28.
Puesto que S({1, 9}) = 10 = S({3, 7}), *queda claro que no es inyectiva.*

7. Sea f: **N** $\to$ **N** la aplicación dada por f(x) = x + 10; ¿f es inyectiva? ¿y sobreyectiva? Determina el conjunto imagen. Resuelve el mismo ejercicio pensando que se trata de la aplicación g: **Z** $\to$ **Z**, definida por g(x) = x + 10.

Es claro que si f(x) = f(x'), *entonces* x + 10 = x' + 10 *y, así,* x = x'. *Por otro lado*,
Im (f) = {11, 12, ...} = {x $\in$ **N** / x > 10}.
Cuando consideramos g *en lugar de* f, *tenemos que* g *es inyectiva y sobreyectiva ya que, si* m *es un número entero*, m = g(m–10) *y* m–10 *sigue siendo entero*.

8. Sean f, g: **R** $\to$ **R** dos funciones definidas por f(x) = ax + b y g(x) = 1 – x + x^2. ¿Para qué valores de a y b se verifica que (g ^{o} f)(x) = $9x^2 - 9x + 3$?

Puesto que
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(ax + b) = 1 - (ax + b) + (ax + b)^2 = a^2x^2 + (2ab - a)x + b^2 - b + 1.$
Igualando los términos correspondientes, obtenemos que $a^2 = 9$, $2ab - a = -9$ *y* $b^2 - b + 1 = 3$.
Así $a = 3$ *o* $a = -3$, *y* $b = 2$ *o* $b = -1$.
Puesto que además $a(1 - 2b) = 9$, *se concluye que* $a = 3$ *y* $b = -1$, *o* $a = -3$ *y* $b = 2$.

9. Sea f: **Z** $\to$ **N**, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & si \quad x>0 \\ -2x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

a) Demuestra que f es inyectiva y sobreyectiva

b) Calcula f^{-1}.

Si calculamos $f(-2) = 4, f(-1) = 2, f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 3$ … *observamos que f transforma los enteros negativos en naturales pares y los enteros positivos en naturales impares. Para demostrar que f es inyectiva, supongamos que x e y son dos enteros tales que f(x) = f(y).*

- *Si x, y* $\leq$ *0, entonces –2x = –2y, es decir x = y.*
- *Si x, y > 0, entonces 2x – 1 = 2y – 1, es decir x = y.*
- *Si x > 0 e y* $\leq$ *0, entonces 2x – 1 = –2y, es decir 2(x + y) = 1, con lo que x + y no es entero, es decir, esta situación no puede presentarse nunca.*

Es claro que f es sobreyectiva, ya que si n = 2k es un natural par, entonces n = f(–k) y, si n = 2k – 1 es un natural impar, entonces f(k) = n. Además, la aplicación f^{-1}: **N** $\to$ **Z**, *definida por:*

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{2} & si \quad x=2k\\ \dfrac{x+1}{2} & si \quad x=2k-1\end{cases}$$

es claramente la inversa de f.

10. Para cada una de las siguientes relaciones definidas en el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}, determina si es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva:

a) R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}
b) R = {(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)}
c) R = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)}
d) R = {(1,1), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3)}
e) R = A × A

La relación del apartado a) es reflexiva, simétrica y transitiva. Es la relación de equivalencia con menor número de elementos que se puede definir en A. *La relación del apartado b) no es reflexiva, por ejemplo,* (1,1) ∉ R*; tampoco es simétrica, ya que* (1,2) ∈ R *y* (2,1) ∉ R, *ni es transitiva pues* (1,2) ∈ R *y* (2,3) ∈ R, *pero* (1,3) ∉ R. *Con respecto a la relación del apartado c), claramente no es reflexiva, ni simétrica* ((1,2) ∈ R *y* (2,1) ∉ R), *pero sí transitiva. Tampoco es reflexiva la relación del apartado d), sí es simétrica, y no es transitiva* ((2,1), (1,2)∈ R *y* (2,2)∉ R). *Finalmente, la relación del apartado e) es reflexiva, simétrica y transitiva.*

11. Sea *R* la relación definida en el conjunto de los números enteros del modo siguiente: dados a y b enteros, a *R* b si, y sólo si, a – b ≤ 2.

a) Demuestra o refuta que *R* es reflexiva
b) Demuestra o refuta que *R* es simétrica
c) Demuestra o refuta que *R* es antisimétrica
d) Demuestra o refuta que *R* es transitiva

R es claramente reflexiva ya que a – a = 0 ≤ 2. *Sin embargo, R no es simétrica ya que* (1,4)∈ *R, pues* 1 – 4 = –3 ≤ 2, *pero* (4,1)∉ *R, pues* 4 – 1 = 3 > 2. *Tampoco es antisimétrica ya que* 1 *R* 0 *y* 0 *R* 1, *siendo* 0 *y* 1 *dos elementos distintos. Finalmente, si observamos que* 1 *R* 2 *y* 2 *R* 4 *pero* (1,4)∉ *R, concluimos que R no es transitiva.*

12. **a)** Si R es la relación de equivalencia definida en {x ∈ **Z** / 100 < x < 200 } por: *x* R *y* si, y sólo si, "*x* e *y* tienen el mismo dígito en las decenas". Calcula la clase de equivalencia [123].
b) Si R es la relación definida en el conjunto de todos los humanos por *x* R *y*, si *x* e *y* tienen los mismos padres, determina la clase de equivalencia a la que tu perteneces.

Con respecto al apartado a), tenemos que [123] = {120,121,122,123,124,125,126,127,128,129}.
La clase de equivalencia de cada ser humano con respecto a la relación del apartado b) está formada por uno mismo y sus hermanos.

13. Sean A y B dos conjuntos finitos con | B | = 3. Si hay 4096 relaciones de A en B, ¿cuántos elementos tiene A?

En este ejercicio hay que recordar que una relación de A en B es un subconjunto de A × B. Sabiendo que $|A\times B| = |A|.|B| = 3n$ *(n es el cardinal de A) y que el número de subconjuntos de A × B es* 2^{3n}*, concluimos que* $4096 = 2^{12} = 2^{3n}$*, es decir, n = 4.*

14. Sea R la relación definida en el conjunto de los enteros por: a R b si, y sólo si, a – b es un entero par no negativo. Demuestra que R es una relación de orden.

Puesto que a – a = 0, *para cualquier entero* a, *y 0 es un entero par, tenemos que* R *es reflexiva. Por otro lado, si* a R b *y* b R a, *entonces* a – b ≥ 0 *y* b – a ≥ 0, *es decir* a = b. *Finalmente, si* a R b *y* b R c, *entonces* a – b = 2n *y* b – c = 2m, *siendo* m *y* n *naturales. La propiedad transitiva se deduce de que* a – c = a – b + b – c = 2n + 2m = 2(n + m), *es decir,* a R c.

15. En **Z** × **Z*** se define la relación (a,b) R (c,d) si, y sólo si, a.d = b.c. Demuestra que es una relación de equivalencia y halla el conjunto cociente (**Z*** = **Z** – {0}).

- *Reflexiva*.- (a,b) R (a,b) *ya que* a.b = b.a
- *Simétrica*.- *Si* (a,b) R (c,d), *entonces* a.d = b.c, *con lo que* (c,d) R (a,b)

- *Transitiva*.- *Si* (a,b) R (c,d) *y* (c,d) R (e,f), *se tiene que* a.d = b.c *y* c.f= d.e. *Multiplicando esta última igualdad por* a, *nos queda* acf = ade = bce *y, como* c *es distinto de cero, concluimos que* a.f = b.e*, es decir*, (a,b) R (e,f).
- *El conjunto cociente es el conjunto de los números racionales, puesto que cada número racional q = a/b se corresponde con la clase de equivalencia* [(*a,b*)]