Tema 4

Polinomios y Fracciones Algebraicas

En general, a lo largo de este tema trabajaremos con el conjunto de los números reales y, en casos concretos nos referiremos al conjunto de los números complejos.

4.1. Expresiones Algebraicas: Polinomios

En una expresión algebraica aparecen una o más *variables, incógnitas o indeterminadas* que se representan habitualmente por letras. Veamos algunos ejemplos de expresiones algebraicas:

- *Monomios* $\frac{4}{3}\pi r^3$ (volumen esfera)
- *Polinomios* $2\pi r^2 + 2\pi rh$ (área total de un cilindro)
- *Identidades* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (La igualdad se satisface para cualquier valor que tomen a y b)
- *Ecuaciones* $4x + 7 = 23$ (La igualdad sólo se satisface si $x = 4$)

Un *monomio* es una expresión algebraica en la que la únicas operaciones que afectan a las variables son la multiplicación y la potenciación con exponente natural. Como ejemplos tenemos $5a^2, 3x^2y$, etc. Llamaremos *coeficiente* al número que multiplica a las variables (parte literal); en los ejemplos anteriores, los coeficientes son 5 y 3. El monomio 0 es aquel cuyo coeficiente vale 0. Para cualquier otro monomio, se denomina *grado de un monomio respecto a una variable* al exponente con el que aparece la variable en el monomio. En el monomio $3x^2y$, el grado respecto a x es 2 y respecto a y es 1. Se llama *grado de un monomio* a la suma de los exponentes de todas las variables. El monomio $3x^2y$ tiene grado 3.

Dos monomios son *semejantes* cuando tienen la misma parte literal, es decir, aparecen las mismas variables con los mismos exponentes. Así, $3x^2y$ es semejante a $-4x^2y$ y no lo es a $4xy$.

Dos monomios semejantes se pueden sumar, siendo la suma un monomio semejante a ellos cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los monomios que se suman. Por ejemplo:

$$3x^2y - 4x^2y = -x^2y$$

Dos monomios cualesquiera se pueden multiplicar, para ello se multiplican los coeficientes y las partes literales. Por ejemplo

$$(3x^2y).(-4xy^3a) = -12x^3y^4a.$$

Nótese que, en el polinomio producto, el exponente de cada variable es la suma de los exponentes con el que aparece en cada monomio, ya que, si x es una de las variables, se tiene que $x^nx^m = x^{n+m}$.

Un *polinomio* es la suma de dos o más monomios no semejantes llamados términos. Cuando sólo aparece una variable, por ejemplo x, un polinomio es una expresión algebraica:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

donde los coeficientes a_i son números reales. Al conjunto de estos polinomios lo denotaremos $\mathbb{R}[x]$.[1]

Si un polinomio no es el polinomio 0, el mayor de los grados de los monomios componentes se llama *grado del polinomio*. Así, tenemos que $3x^2y - 2x^3ya + 2xa^2$ tiene grado 5 que es el grado del monomio $-2x^3ya$. Cuando el polinomio pertenezca a $\mathbb{R}[x]$, se tiene que el grado del polinomio es n si $a_n \neq 0$ y, sin embargo, $a_m = 0$, para todo $m > n$. Al coeficiente del monomio de mayor grado en un polinomio cualquiera, se le llama *coeficiente principal* y es siempre no nulo. Nótese que los polinomios de grado cero o *constantes* son los números reales.

Para sumar dos polinomios basta sumar los monomios semejantes de cada uno de ellos y los demás dejarlos como estaban.

Ejemplo 37.

- $(7x^3 - 4x^2 + 3) + (-7x^3 + 2x - 5) = -4x^2 + 2x - 2$
- $(x^2 + 2x + 7z + 5) + (3x^2 - 6x + 3z + 2y - 4) = 4x^2 - 4x + 10z + 2y + 1$

En cualquier caso, el grado de la suma es menor o igual que el máximo de los grados de los polinomios que se suman.

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio y se suman los resultados.

[1]En realidad, los coeficientes pueden pertenecer a cualquier conjunto A y el conjunto de polinomios correspondiente se representa como $A[x]$. Como veremos más adelante, la estructura de A condiciona la de $A[x]$ de tal forma que, cuando A es un cuerpo, se tiene que $A[x]$ es un dominio.

Ejemplo 38.

- $3x^2(2x^3 - 7x^2 + 4x - 1) = 6x^5 - 21x^4 + 12x^3 - 3x^2$
- $4x(2xy - 3x^2 + 6y^3) = 8x^2y - 12x^3 + 24xy^3$

Para multiplicar dos polinomios P y Q, se multiplica cada monomio de P por Q y se suman los monomios semejantes obtenidos.

Ejemplo 39.

I) $(2xy - 3x^2)(2x + 5y) = 2xy(2x + 5y) - 3x^2(2x + 5y) = 4x^2y + 10xy^2 - 6x^3 - 15x^2y = -11x^2y + 10xy^2 - 6x^3$

II) $(3x^3 - x^2 - 4)(2x^2 + 4x - 1) = 3x^3(2x^2 + 4x - 1) - x^2(2x^2 + 4x - 1) - 4(2x^2 + 4x - 1) = 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 - 2x^4 - 4x^3 + x^2 - 8x^2 - 16x + 4 = 6x^5 + 10x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 16x + 4.$

III) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ *(Suma por diferencia)*

IV) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *(Cuadrado de una suma)*

V) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *(Cuadrado de una diferencia)*

Para facilitar la reducción de los monomios semejantes, resulta útil colocar el producto de polinomios como si se tratara de una multiplicación de números.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & x^3 & & -2x & +1 \\
 & & & 2x^2 & +x & -3 \\
\hline
 & & -3x^3 & & +6x & -3 \\
 & x^4 & & -2x^2 & +x & \\
2x^5 & & -4x^3 & +2x^2 & & \\
\hline
2x^5 & +x^4 & -7x^3 & & +7x & -3
\end{array}$$

La siguiente tabla proporciona un método para obtener los coeficientes del producto $P(x)Q(x)$ siendo $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = 2x^2 + x - 3$. En la fila superior, colocamos los coeficientes de $P(x)$ y hacemos lo mismo con los de $Q(x)$ en la columna de la derecha (si algún coeficiente es 0, se deja el hueco corespondiente). A continuación, multiplicamos la fila superior por las columnas y finalmente sumamos en diagonal.

		1	0	-2	1	
		2	0	-4	2	2
		1	0	-2	1	1
		-3	0	6	-3	-3
2	1	-7	0	7	-3	

De lo dicho anteriormente, se deduce que si $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i \in \mathbb{R}[x]$ y $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_j x_j \in \mathbb{R}[x]$ son dos polinomios en una sola variable con $n \geq m$, las operaciones suma y producto se pueden expresar como:

$$P(x) + Q(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i$$

y

$$P(x)Q(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x_i, \text{ siendo } c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$$

Es fácil comprobar que $(\mathbb{R}[x], +, .)$ es un dominio (aniilo conmutativo sin divisores de cero) pero no es un cuerpo. Tiene propiedades análogas a $(\mathbb{Z}, +, .)$.

4.2. Divisibilidad en el anillo de polinomios

A partir de ahora trabajaremos únicamente con polinomios en una variable, con coeficientes en $\mathbb{R}$, es decir con elementos de $\mathbb{R}[x]$.

Dados dos polinomios $P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x_i$ (dividendo) y $Q(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x_j$ (divisor), existen siempre un par de polinomios $C(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) tales que

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$$

siendo $R(x) = 0$ o el grado de $R(x)$ estrictamente menor que el del divisor $Q(x)$.

Para efectuar la división, multiplicamos $a_n b_m^{-1} x^{n-m}$ por $Q(x)$, obteniendo un polinomio $Q'(x)$ que se lo restamos a $P(x)$. El polinomio $P'(x) = P(x) - Q'(x)$ tiene grado estrictamente menor que $P(x)$ y con él repetimos el proceso hasta obtener el resultado deseado, es decir hasta obtener un resto nulo o de grado menor que el cociente.

Ejemplo 40.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -\ 2x & +\ 3 & \ 2x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5}
-\ x^3 & +\ {}^1\!/_2 x^2 & -\ {}^1\!/_2 x & & {}^1\!/_2 x + {}^1\!/_4 \\
 & {}^1\!/_2 x^2 & -\ {}^5\!/_2 x & +\ 3 & \\
 & -\ {}^1\!/_2 x^2 & +\ {}^1\!/_4 x & -\ {}^1\!/_4 & \\
 & & -\ {}^9\!/_4 x & +\ {}^{11}\!/_4 &
\end{array}$$

Si el resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ es nulo, se dice que $P(x)$ es un *múltiplo* de $Q(x)$ o que $Q(x)$ es un *divisor o factor* de $P(x)$.

Cuando queremos dividir $P(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ entre $x - a$ siendo a un número real, la *Regla de Ruffini* permite obtener fácilmente el cociente y el resto de la división:

$$\begin{array}{c|lllll}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
a & & a_n a & \cdots & a_2 + \cdots + a_n a^{n-2} & a_1 + a_2 a + \cdots + a_n a^{n-1} \\ \hline
 & a_n & a a_n + a_{n-1} & \cdots & a_1 + a_2 a + \cdots + a_n a^{n-1} & a_0 + a_1 a + \cdots + a_n a^n
\end{array}$$

De esta manera, se tiene que el cociente $Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_i$ es el polinomio de grado $n-1$ cuyos coeficientes son:

$$\begin{array}{lcl} b_{n-1} & = & a_n \\ b_{n-2} & = & a_{n-1} + a a_n \\ \vdots & & \\ b_0 & = & a_1 + a_2 a + \cdots + a_n a^{n-1} \end{array}$$

y el resto es $P(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i$ que recibe el nombre de *valor numérico del polinomio* en $x = a$. Cuando $P(a) = 0$, se dice que a es un *raíz o cero* de $P(x)$. De lo dicho anteriormente, se desprende que a es un raíz de $P(x)$ si, y sólo si, $x - a$ es un divisor de $P(x)$.

Ejemplo 41. *Consideremos el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Si obtenemos mediante Ruffini $P(2)$ y $P(1)$:*

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}$$

deducimos que 2 es raíz de $P(x)$, 1 no lo es y además que

$$P(x) = (x-2)(x^2+1) = (x-1)(x^2-x) - 2.$$

Un polinomio puede tener raíces en $\mathbb{C}$ y no en $\mathbb{R}$. Es el caso de $x^2 + 1$ que no tiene ceros en $\mathbb{R}$ y, sin embargo, se anula para i y $-i$ en $\mathbb{C}$.

Sobre las raíces de un polinomio hay que tener en cuenta que si a es raíz de $P(x)$, se tiene que $P(x) = (x-a)Q(x)$, por lo que $P(x)$ tendrá a lo sumo n raíces en $\mathbb{R}$

Ejemplo 42. i) *$x^2 - 3x + 2$ tiene dos raíces que son 1 y 2*

ii) *$x^2 - 2x + 1$ tiene una única raíz que es 1*

iii) *$x^2 + 1$ no tiene raíces en $\mathbb{R}$*

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se dice que un polinomio mónico $D(x)$ es el *máximo común divisor* de ambos y se denota:

$$D(x) = mcd(P(x), Q(x))$$

si es divisor de ambos y no hay otro divisor mónico común con mayor grado que él. Para obtenerlo, se puede utilizar la descomposición en irreducibles de $P(x)$ y $Q(x)$ (que veremos más adelante) o el algoritmo de Euclides que hemos utilizado con los números enteros.[2]

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se dice que un polinomio mónico $M(x)$ es el *mínimo común múltiplo* de ambos y se denota:

$$M(x) = mcm(P(x), Q(x))$$

si es múltiplo de ambos y no hay otro múltiplo mónico común con menor grado que él.

Ejemplo 43. *Si* $P(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2$ *y* $Q(x) = (x^2 - 1)(x + 2) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$*, se tiene que:*

$$mcd(P(x), Q(x)) = (x - 1)(x + 1) = (x^2 - 1)$$

y

$$mcm(P(x), Q(x)) = (x^2 - 1)(x + 1)(x + 2) = (x - 1)(x + 1)^2(x + 2)$$

Si a es raíz del polinomio $P(x)$, se dice que a tiene *multiplicidad* r si $P(x) = (x - a)^r Q(x)$ con $Q(a) \neq 0$.

Ejemplo 44. I) *Puesto que* $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, 3 *es una raíz de multiplicidad* 2

II) $x^2 + 4$ *no tiene raíces en* $\mathbb{R}$ *y tiene dos raíces de multiplicidad uno en* $\mathbb{C}$ *que son* $\pm 2i$.

Conviene destacar que si $P(x) = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ y $z = a + bi$ es una raíz de $P(x)$ en $\mathbb{C}$, también $\bar{z} = a - bi$ es raíz de $P(x)$ ya que:

$$\begin{aligned} P(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i \bar{z}^i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P(\bar{z}) = 0 \end{aligned}$$

[3] De este modo, las raíces complejas de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$ siempre aparecen por pares. Recordemos que si $z = a + bi$ es un número complejo, el conjugado de z es $\bar{z} = a - bi$ y se verifica que $\bar{\bar{z}} = z$, $\bar{z} = z$ si, y sólo si, z es real, $z + \bar{z} = 2a$ y $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Para la búsqueda de las raíces de un polinomio puede ser útil saber que si $x = \frac{a}{b}$ (con a y b números enteros sin divisores en común) es una raíz racional de $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, se tiene que a es un divisor de a_0 y b es un divisor de a_n.

---

[2] Este es el que se utiliza en la práctica debido a la dificultad que se puede presentar a la hora de factorizar un polinomio arbitrario

[3] Aqui se utiliza que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Ejemplo 45. *Sea* $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x + 1$. *Puesto que* $P(1) = 2$, $P(-1) = 4$, $P(2) = 13$ *y* $P(-2) = 53$, *se concluye que* $P(x)$ *no tiene raíces en* $\mathbb{Q}$.

Por otro lado, en $\mathbb{C}$, *el Teorema fundamental del Álgebra* garantiza que todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces.

De la misma forma que los números primos juegan un importante papel en la Aritmética, los llamados polinomos irreducibles serán sus equivalentes en el anillo de polinomios. Diremos que un polinomio $P(x)$ es irreducible si cuando $P(x) = Q(x)H(x)$ (siendo $Q(x)$ y $H(x)$ polinomios de $\mathbb{R}[x]$), se tiene que $Q(x)$ o $H(x)$ son de grado cero, es decir, los únicos divisores de $P(x)$ son las constantes y $P(x)$ multiplicado por alguna constante. Si no ocurre esto, se dice que $P(x)$ es reducible, en cuyo caso, $P(x) = Q(x)H(x)$, siendo $Q(x)$ y $H(x)$ de grado al menos 1. Si, o bien $Q(x)$ o bien $H(x)$, son reducibles, admitirán una nueva descomposición, encontrándose finalmente una descomposición de $P(x)$ en producto de potencias de irreducibles.

Esta factorización se utiliza para el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de $P(x)$ y $Q(x)$, ya que el primero es el producto de los factores irreducibles comunes a $P(x)$ y $Q(x)$ elevados al menor exponente, mientras que el mínimo común múltiplo es el producto de los factores irreducibles comunes y no comunes de $P(x)$ y $Q(x)$ elevados al mayor exponente.

Ejemplo 46. *Si* $P(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2$ *y* $Q(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)$, *se tiene que:*

$$mcd(P(x), Q(x)) = (x - 1)(x + 1) = (x^2 - 1)$$

y

$$mcm(P(x), Q(x)) = (x - 1)(x + 1)^2(x^2 + 2)$$

El único problema que nos queda por atacar es ¿cómo se reconocen los polinomios irreducibles? De lo dicho anteriormente, debería haber quedado claro que un polinomio de grado uno es siempre irreducible mientras que un polinomio, de grado mayor que uno, con una raíz a nunca es irreducible ya que es divisible por $x - a$. De hecho, en $\mathbb{C}[x]$ los únicos irreducibles son los polinomios de grado uno, mientras que en $\mathbb{R}[x]$ los polinomios irreducibles son los de grado uno o de grado dos $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$. En efecto, si consideramos en $\mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado mayor o igual que 3, nunca será irreducible ya que, si su grado es impar tendrá al menos una raíz real.[4] Cuando su grado sea $2n$ y no tenga raíces reales, tendrá $2n$ raíces complejas que aparecerán emparejadas, es decir, las raíces serán:

$$(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$$

[4]Recordemos que las raíces complejas aparecen por pares (una y su conjugada)

con lo que la descomposición de $P(x)$ resulta:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-z_k)(x-\bar{z}_k) = \prod_{k=1}^{n}(x^2-(z_k+\bar{z}_k)x+z_k\bar{z}_k) = \prod_{k=1}^{n}(x^2-2a_kx+(a_k^2+b_k^2))$$

donde, para cada k, se tiene que $z_k = a_k+b_ki$. Queda claro pues que $P(x)$ no es irreducible ya que cada $x^2-2a_kx+(a_k^2+b_k^2)$ es un polinomio irreducible sin más que tener en cuenta que $4a_k^2-4(a_k^2+b_k^2) = -4b_k^2 < 0$.

Finalmente, si un polinomio $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ de grado n tiene n raíces α_i $(i = 1,\ldots,n)$, las *Fórmulas de Cardano-Vieta* ligan los coeficientes de $P(x)$ con las raíces de $P(x)$. Dado que $a_0+a_1x+\ldots a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n = a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} a_0a_n^{-1} & = & \prod_{i=1}^{n}\alpha_i \\ a_1a_n^{-1} & = & \sum_{i=1}^{n}\alpha_1\cdots\widehat{\alpha_i}\cdots\alpha_n \\ \vdots & & \\ a_{n-2}a_n^{-1} & = & \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\alpha_{i+1} \\ a_{n-1}a_n^{-1} & = & \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \end{array}$$

donde la notación $\widehat{\alpha}$ indica que α no aparece en el producto.

4.3. Fracciones Algebraicas

Una *fracción algebraica* es un cociente de polinomios $\frac{P}{Q}$. El polinomio P se llama *numerador* y Q se denomina *denominador* y es no nulo. Como ejemplos tenemos:

$$\frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{x^2-3x+1}{x-2}.$$

Diremos que dos fracciones $\frac{P}{Q}$ y $\frac{P'}{Q'}$ son *equivalentes* si los polinomios PQ' y QP' coinciden. Así pues, para obtener una fracción equivalente a $\frac{P}{Q}$ basta multiplicar P y Q por un mismo polinomio H. También puede interesarnos obtener una fracción equivalente a $\frac{P}{Q}$ diviendo P y Q por algún divisor común de ambos. Si P y Q no tienen divisores comunes, diremos que la fracción $\frac{P}{Q}$ es *irreducible.*

Ejemplo 47. I*) La fracción* $\frac{x+1}{x-1}$ *es equivalente a* $\frac{x^2+x}{x^2-x}$

II*) La fracción* $\frac{3x(x+y)^2}{6x^2(x+y)}$ *es equivalente a* $\frac{(x+y)}{2x}$

Si nos restringinmos a las fracciones $\frac{P(x)}{Q(x)}$ podríamos comenzar diciendo que la relación “ser equivalente a”es una relación de equivalencia en el producto cartesiano:

$$\mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x] = \{(P(x),Q(x))\ ;\ P(x),Q(x)\in\mathbb{R}[x]\}$$

El conjunto cociente se denota por $\mathbb{R}(x)$ y es un cuerpo con la suma y el producto que definimos a continuación.[5]

Para **sumar** dos fracciones $\frac{P}{Q}$ y $\frac{P'}{Q'}$ se *reducen a común denominador* transformando cada una en otra equivalente pero con denominador común. Para ello, se calcula el mínimo común múltiplo $M(x) = mcm(Q(x), Q'(x))$. Puesto que $M(x) = Q(x)H(x) = Q'(x)H'(x)$, la fracción $\frac{P}{Q}$ (respectivamente $\frac{P'}{Q'}$) es equivalente a $\frac{PH}{M}$ (respectivamente a $\frac{P'H'}{M}$). La fracción suma se obtiene sumando los numeradores y manteniendo el denominador común obtenido previamente, es decir:

$$\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'} = \frac{PH}{M} + \frac{P'H'}{M} = \frac{PH + P'H'}{M}.$$

Ejemplo 48.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{(x+1)x} = \frac{1}{(x+1)x}$$

El numerador de la **fracción producto** se obtiene multiplicando los numeradores y el denominador haciendo lo mismo con los denominadores.

Ejemplo 49.

$$\frac{2a^2}{5b} . \frac{15b^3}{8a^4} = \frac{30a^2b^3}{40a^4b} = \frac{3b^2}{4a^2}$$

Si $\frac{P}{Q}$ es una fracción algebraica, su inversa es $\frac{Q}{P}$ ya que si las multiplicamos obtenemos la fracción 1 que es el elemento neutro para el producto de fracciones. Para **dividir** dos fracciones multiplicaremos la primera por la inversa de la segunda.

Ejemplo 50.

$$\frac{x^2-1}{x} : \frac{x+1}{x^2} = \frac{x^2(x^2-1)}{x(x+1)} = x(x-1)$$

[5] Es la situación análoga a la que se plantea con $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$