Tema 0

Introducción a la Lógica

En cualquier disciplina científica se necesita distinguir entre argumentos válidos y no válidos. Para ello, se utilizan, a menudo sin saberlo, las reglas de la lógica. Aquí presentaremos algunas de ellas con los siguientes objetivos:

- Estudiar la validez de argumentos
- Formalizar argumentos del lenguaje natural

0.1. Proposiciones

Una *proposición* es un enunciado u oración declarativa de la que puede decirse si es verdadera o falsa pero no ambas cosas a la vez, es decir, a la que se le puede asignar uno y uno sólo de los valores de verdad: verdadero (1) o falso (0).

Ejemplo 1. *Son proposiciones:*

i) *La rosa es una flor.*

ii) *El cocodrilo es un mamífero.*

No son proposiciones:

i) *¿Cuál es tu teléfono?*

ii) *¡Silencio, por favor!*

iii) *Ni frío ni calor.*

0.2. Operadores Lógicos

Las *proposiciones simples, primitivas o átomos* no admiten una descomposición en otras más sencillas (los dos ejemplos anteriores son proposiciones primitivas). Se suelen denotar con letras minúsculas p, q, r, etc. La combinación de proposiciones simples y *conectivos lógicos* da lugar a las *proposiciones compuestas.*

Ejemplo 2. *Son proposiciones compuestas:*

i) *Me gusta ver la televisión y jugar al tenis*

ii) *Para que puedas ir al cine, es suficiente con que adquieras previamente la entrada*

Los conectivos [1](u operadores lógicos) son:

i) **Negación** $\neg p$. Se lee "No p", "no ocurre p", "no se verifica p".

ii) **Conjunción** $p \wedge q$. Se lee "p y q".

iii) **Disyunción** $p \vee q$. Se lee "p o q".

iv) **Condicional** $p \to q$. Se lee "Si p, entonces q", "siempre que p entonces q", "p es suficiente para q", "q es necesario para p".

v) **Bicondicional** $p \leftrightarrow q$. Se lee "p si, y sólo si, q", "p es necesario y suficiente para q", "p equivale a q".

vi) **Disyunción exclusiva** $p \veebar q$. Se lee "p o q pero no ambas a la vez"

En el lenguaje de la lógica proposicional suelen admitirse también los símbolos $\top$ y $\perp$ para representar, respectivamente, un enunciado que es con certeza verdadero $(0 = 0)$ y un enunciado que es con certeza falso $(1 = 0)$.

Cuando nos encontramos con una proposición compuesta, necesitamos conocer cuál es el valor de verdad que le corresponde a partir de los valores de verdad de sus proposiciones componentes. La siguiente tabla de verdad muestra los valores de verdad de los conectivos lógicos $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \veebar\}$.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$p \veebar q$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Una tabla de verdad de una proposición compuesta, construida a partir de sus proposiciones componentes $p, q, r, \ldots$, es un método que proporciona el valor de verdad de dicha proposición compuesta. Para ello, se determinan

[1]En realidad, nos bastaría definir los operadores $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ ya que los otros se obtienen a partir de ellos

los valores de verdad de todas las subproposiciones componentes desde las más sencillas a las más complejas. Por ejemplo, la tabla de verdad de:

$$(p \vee q) \wedge (p \to \neg q)$$

es:

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$(p \vee q) \wedge (p \to \neg q)$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Cuando una proposición $\mathcal{P}$ es siempre verdadera, independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones componentes, se dice que es una *tautología*. Si resulta siempre falsa, se denomina *contradicción*. En la tabla de una tautología sólo aparecen 1 y en la de una contradicción sólo encontraremos 0.

Ejemplo 3. *La proposición $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ es una tautología y $p \wedge \neg p$ es una contradicción.*

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
0	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
1	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*

Al asociar varias proposiciones mediante los conectivos lógicos, se obtienen las *fórmulas bien formadas* (fbf) teniendo en cuenta que:

i) Una proposición simple es una fbf

ii) Si p es una fbf, también lo es $\neg p$

iii) Si p y q son fbf, también lo son $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$ y $p \leftrightarrow q$.

iv) Todas las fbf se obtienen aplicando los puntos anteriores.

Ejemplo 4. *Son fbf*

- $p \to (\neg q \wedge s)$
- $\neg(\neg q \vee p) \leftrightarrow r$

No son fbf

- $\wedge \neg p$
- $\to q$
- $p \neg r$

0.3. Implicaciones y Equivalencias Lógicas

Cuando dos fórmulas bien formadas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ tienen siempre los mismos valores de verdad, es decir, cuando el bicondicional $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ es una tautología, se dice que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son *lógicamente equivalentes* y se denota:

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}.$$

Todas las tautologías son lógicamente equivalentes a $\top$ y todas las contradicciones a $\perp$.

Ejemplo 5. *Las proposiciones $\neg(p \vee q)$ y $\neg p \wedge \neg q$ son lógicamente equivalentes.*

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

Cuando, dadas dos fórmulas bien formadas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, el condicional $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ es una tautología se dice que $\mathcal{P}$ *implica lógicamente a* $\mathcal{Q}$ y se denota:

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$$

Para ello tiene que verificarse que si $\mathcal{P}$ es verdadera, también lo es $\mathcal{Q}$ o, lo que es lo mismo, si $\mathcal{Q}$ es falsa, también es falsa $\mathcal{P}$.

Ejemplo 6. *La proposición $(p \to q) \wedge (q \to r)$ implica lógicamente a $p \to r$ (Ley del silogismo).*

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to$ $\to (p \to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

0.4. Teoremas y Demostraciones

Dadas las proposiciones $H_1, \ldots, H_n$ llamadas *hipótesis, premisas o axiomas*, se dice que una proposición C se deduce de ellas y se denota

$$H_1, \ldots, H_n \Longrightarrow C$$

si $H_1 \wedge \ldots \wedge H_n \Longrightarrow C$, es decir $H_1 \wedge \ldots \wedge H_n \to C$ es una tautología. Así pues, si todas las premisas son verdaderas, también ha de serlo la conclusión. La *demostración* permite garantizar que estamos efectivamente en la situación $H_1, \ldots, H_n \Longrightarrow C$.

Por comodidad denotaremos H a la conjunción de las hipótesis, es decir, $H = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$.

Las principales formas de demostración[2] son:

- **Directa o Formal.**

  Se demuestra que
  $$H \to C$$
  es una tautología.

- **Contraposición**

  Se demuestra que
  $$\neg C \to \neg H$$
  es una tautología.[3]

- **Contradicción o Reducción al absurdo.**[4]

  Consiste en demostrar que $H \wedge \neg C$ es una contradicción.

Ejemplo 7.

I) *Demostrar que la suma de dos números pares es un número par.*

Hagamos una demostración directa. Sabemos que todo número par es de la forma $x = 2k$, siendo k otro número. Por lo tanto, si $x = 2k$ e $y = 2q$ son dos números pares, entonces $x + y = 2k + 2q = 2(k + q)$, que también es un número par.

II) *Demostrar que si el cuadrado de un número es impar, dicho número es impar.*

Hagamos ahora una demostración por contraposición. Nuestra hipótesis es que x^2 es impar y la conclusión que x es también impar. Supongamos que x no es impar, es decir $x = 2k$. Claramente $x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ que es un número par. Así vemos que la negación de la conclusión nos lleva a negar la hipótesis.

---

[2] En la demostración de un teorema, se consideran hipótesis tanto las que aparecen en el enunciado, como los axiomas que hayamos admitido o, las tautologías que conozcamos de antemano.

[3] Teniendo en cuenta el ejemplo 3, lo que se demuestra es que, para algún índice i, $\neg C \Longrightarrow \neg H_i$.

[4] Este tipo de demostración se utiliza con frecuencia en Matemáticas. Se basa en que de una, o varias premisas verdaderas, no se puede deducir una contradicción. En la práctica, el proceso de demostración concluye cuando aparece una contradicción, por ejemplo $p \wedge \neg p$.

iii) *Demostrar que si, al sumar un número real x consigo mismo, obtenemos x, se puede concluir que $x = 0$.*

Utilicemos ahora reducción al absurdo. Nuestra hipótesis (H) ahora es que $x + x = x$ y nuestra conclusión (C) es que $x = 0$. Si suponemos $H \wedge \neg C$, se tiene que $2x = x$, siendo $x \neq 0$. Al ser x no nulo, podemos dividir la expresión $2x = x$ por x, con lo que obtenemos que $2 = 1$, es decir una contradicción, lo cual significa que el argumento es válido.

Ejemplo 8. *Demostremos el llamado Modus Ponens:*

$$\{(p \to q), p\} \Longrightarrow q$$

- **Demostración directa**

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

- **Demostración por contraposición**

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$\neg[(p \to q) \wedge p]$	$\neg q \to \neg[(p \to q) \wedge p]$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

- **Demostración por reducción al absurdo**

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \wedge q) \wedge p \wedge \neg q$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

0.5. Cuantificadores

Un enunciado, $p(x)$, en el que aparece una variable x, se dice que es una *función proposicional* si, al sustituir la variable x por un valor determinado, $p(x)$ se convierte en una proposición. Por ejemplo, "$2x + 5$ es un múltiplo de tres". Es claro que, si $x = 2$, el enunciado es verdadero y, si $x = 1$, la proposición es falsa. Si la función proposicional depende de más de una variable, la denotaremos $p(x, y, z, ...)$.

Generalmente, para convertir una función proposicional en una proposición se utilizan los llamados *cuantificadores*:

- **Cuantificador Existencial** $\exists x\ p(x)$. Se lee "existe x que verifica $p(x)$", "hay algún x que verifica $p(x)$".

  Es verdadera cuando $p(x)$ es verdadera para, al menos, un valor de x. Es falsa cuando, para todo valor de x, la proposición $p(x)$ es falsa. "Existe un entero x que sumado con 1 nos da 0"es verdadero. "Existe un entero x que sumado con 1 no da x"es un argumento falso. Cuando el valor de x que verifica $p(x)$ es único se utiliza la notación: $\exists^{\circ} x\ p(x)$.

- **Cuantificador Universal** $\forall x\ p(x)$. Se lee "para todo x se verifica $p(x)$", "cualquier x verifica $p(x)$".

  Este tipo de proposición es verdadera cuando $p(x)$ es verdadera para cualquier valor de x. Es falsa, si para algún valor de x es falsa. Por ejemplo: "Todos los alumnos de la Universidad de A Coruña tienen más de 16 años" es una proposición verdadera. "Todos los alumnos de la Universidad de La Coruña nacieron en La Coruña" es una proposición falsa.

La relación entre ambos cuantificadores se basa en las dos reglas siguientes:

- $\neg \exists x\ p(x) \equiv \forall x\ \neg p(x)$
- $\neg \forall x\ p(x) \equiv \exists x\ \neg p(x)$

Ejemplo 9. *Epiménides de Cnosos (siglo V. a. de C.) decía "Todos los cretenses son mentirosos y yo soy cretense, luego miento". Alguien, a la vista de ello, razona como sigue.*

> ***Si Epiménides mintió en lo que dijo, entonces los cretenses no eran mentirosos, luego Epiménides, por ser cretense, no mintió en lo que dijo. Se llega pues a una contradicción.***

¿Es el razonamiento anterior correcto?

> ***No, ya que la negación de "Todos los cretenses son mentirosos"es que algún cretense no miente, pero no que todos sean no mentirosos.***