Tema 4

Derivación

4.1 Definiciones y propiedades básicas

Definición 4.1.1 Dada una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que f es **derivable** en un punto $x_0 \in D$, si existe el límite siguiente, que denotaremos $f'(x_0)$ o $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

El límite $f'(x_0)$ se denomina **derivada** , respecto de x, de la función f en el punto x_0.

Ejemplo 4.1.1 Dada la función $f(x) = \ln x$, su derivada en un punto x será:
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} =$
$\lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right] =$
$\lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$

Ejemplo 4.1.2 En el caso de $f(x) = \sin x$:
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$
Y, recordando que $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2}}{h} =$
$\lim_{h \to 0} \frac{\cos \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \to 0} \cos \frac{2x+h}{2} \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$
Ya que, según se vió en el tema 2 (Ejercicios resueltos):$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dado que la derivada es un límite, igual que existen límites laterales existen derivadas laterales:

Definición 4.1.2 Dada una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que en $x_0 \in D$ admite:

derivada lateral por la derecha, que denotamos $f'_{x_0^+}(x)$ ó $f'\left(x_0^+\right)$:

$$f'(x_0^+) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

derivada lateral por la izquierda, que denotamos $f'(x_0^-)$ ó $f'_{x_0^-}(x)$:

$$f'(x_0^-) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

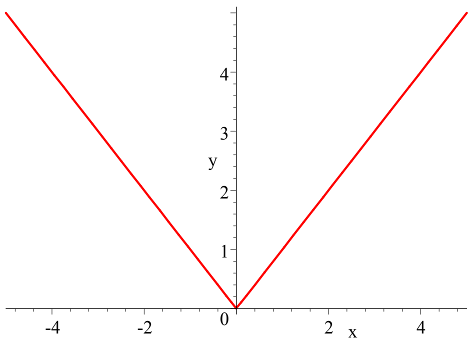
Como en el caso de los límites laterales, la existencia de derivada implica la existencia, e igualdad, de las derivadas laterales. Recíprocamente si existen y coinciden las derivadas laterales, existe la derivada y coincide con ellas.

En caso de que alguna de las derivadas laterales no exista, o en caso de que sean distintas, no existe la derivada. Igual que no existe el límite, si los límites laterales son distintos o alguno de ellos no existe.

Teorema 4.1.1 *Dada la función* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tenemos:*

$$f \text{ derivable en } x \in D \Rightarrow f \text{ continua en } x.$$

Nota 4.1.1 El recíproco del teorema precedente es falso, como puede verse, por ejemplo, con la función $f(x) := |x|$, en el punto $x = 0$:



$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{h\to 0} |0 + h| = 0 = \lim_{h\to 0} |0 - h| = \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

Límites que coinciden con $f(0)$, es decir f es continua en 0, pero:

$$f'(0^+) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h}{h} = 1$$
$$f'(0^-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|-h|-0}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h}{-h} = -1$$

Las derivadas laterales son diferentes, por lo que f no es derivable en 0.

4.2 Interpretación geométrica de la derivada

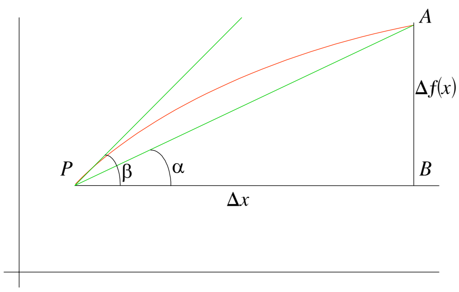
Supuesto que la curva representada en la figura corresponde a la función de ecuación $y = f(x)$, consideremos los puntos:

$$P = (x, f(x)),\ A = (x + \Delta x, f(x) + \Delta f(x))$$

Como podemos ver, considerando el triángulo APB: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \tan\alpha$, pero, cuando $\Delta x \to 0$, el punto A tiende a coincidir con el punto P, de manera que la cuerda $\overline{AP}$ pasa a ser la tangente a la curva en P y, en el límite, el ángulo α pasa a coincidir con el ángulo β, así

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \tan\alpha = \tan\beta$$

Por tanto la derivada de una función en un punto es, numéricamente, igual al valor de la tangente **trigonométrica** del ángulo formado, con el sentido positivo del eje OX, por la tangente **geométrica** a la curva correspondiente, en el punto dado. En los puntos en que la curva admite dos tangentes distintas, la derivada no existe, pues tendría dos derivadas distintas, una por cada tangente.



4.3 Derivadas de las operaciones con funciones

Teorema 4.3.1 *Dadas dos funciones $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivables en un punto $x \in X$, con derivadas respectivas $f'(x), g'(x)$ en tal punto, se verifica:*

i. $f+g$ *es derivable en* x*, siendo* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
ii. Dada una constante $\lambda \in \mathbb{R}$, λf *es derivable en* x *y* $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
iii. $f \cdot g$ *es derivable en* x*, siendo* $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$.
iv. $\frac{f}{g}$ *es derivable en* x *si* $g(x) \neq 0$*, siendo* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

4.4 Derivadas de funciones elementales

Veremos algunas, las derivadas de las funciones $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$, se deducen de la derivada de la función $\sin x$.

Teorema 4.4.1 *Se verifica:*
i. $f(x) = cte \Rightarrow f'(x) = 0$
ii. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
iii. $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
iv. $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$.

4.5 Regla de la cadena

(Derivada de la función de función)

Dada una función $g(f)$, en la que f a su vez es función de otra variable x, se trata de dar una regla que permita derivar g respecto de x.

Por ejemplo si queremos derivar la función $y = \ln \frac{x^2+1}{x^2}$, con respecto a x, podemos considerar las funciones $f = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$, y $g = g(f) = \ln f$, el siguiente teorema da una regla para calcular $\frac{dy}{dx}$:

Teorema 4.5.1 ***(Regla de la cadena)*** *Dadas las funciones:*
$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, derivable en* $x \in A$*, con* $f(A) \subseteq B$
$g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, derivable en* $y = f(x) \in B$
La función compuesta $g \circ f$*, es derivable en* x*; siendo:*

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$$

En el ejemplo precedente será:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx} = \frac{d \ln f}{df} \cdot \frac{d\frac{x^2+1}{x^2}}{dx} =$$
$$\frac{1}{f} \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2+1)}{x^4} = \frac{x^2}{x^2+1} \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x(x^2+1)}$$

Como consecuencia inmediata de este teorema, resultan las reglas usuales de derivación:

$f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow f'(x) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$

$f(x) = u^n(x) \Rightarrow f'(x) = nu^{n-1}(x)\, u'(x)$

$f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$f(x) = a^{u(x)}$, siendo a constante:

$\ln f(x) = u(x) \cdot \ln a \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = u'(x) \ln a \Rightarrow f'(x) = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$

$f(x) = \sin u(x) \Rightarrow f'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x)$.

4.6 Derivada de la función inversa

Recordemos que, tal como se definió en el tema relativo a funciones y continuidad, dada una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(A) := B \subset \mathbb{R}$, diremos que f admite una **inversa** $f^{-1} : B \longrightarrow A$, si $f \circ f^{-1}(y) = y$, $\forall y \in B$ es decir $f \circ f^{-1} = 1_B$, y $f^{-1} \circ f(x) = x$,$\forall x \in A$, o $f^{-1} \circ f = 1_A$, donde 1_A, y 1_B, representan las funciones identidad de A y B respectivamente, es decir $1_A(x) = x$,$\forall x \in A$, y $1_B(y) = y$,$\forall y \in B$.

$$A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$$

El siguiente teorema da una regla de derivación de la función inversa de una dada:

Teorema 4.6.1 *Dada una función monótona $f : [a,b] \to [c,d] = f([a,b])$, verificando:*

i. Es derivable en $[a,b]$

ii. Admite inversa g

Entonces g es derivable en $[c,d]$, siendo: $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$ $\forall y = f(x) \in [c,d]$.

Debe tenerse cuidado con las variables que utilizan f y g:

Ejemplo 4.6.1 Calcular la derivada de $y = \arcsin x$

Sea $g(x) = \arcsin x$, es la inversa de $f(y) = \sin y$, así aplicando el resultado anterior será:

$g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ *o bien:* $g'(x) = \frac{1}{\cos y}$

Pero la derivada $g'(x)$, debe darse en función de x, así que:

$g'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

En casos como el precedente, puede utilizarse otro método: Dada $y = \arccos x$, tenemos: $\cos y = x$, derivando, de acuerdo con la regla de la cadena: $-\sin y \cdot y' = 1$, por tanto:

$y' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

De todo lo anterior podemos deducir una tabla de derivadas:

función $f(x)$	función derivada $f'(x)$
$u^n(x)$	$nu^{n-1}(x)\,u'(x)$
$\ln u(x)$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$a^{u(x)}$	$a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$
$\sin u(x)$	$\cos u(x) \cdot u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x) \cdot u'(x)$
$\tan u(x)$	$[1 + \tan^2 u(x)] \cdot u'(x) = \sec^2 u(x) \cdot u'(x)$
$\cot u(x)$	$-[1 + \cot^2 u(x)]\,u'(x) = -\csc^2 u(x) \cdot u'(x)$
$\sec u(x)$	$\sec u(x) \cdot \tan u(x) \cdot u'(x)$
$\csc u(x)$	$\csc u(x) \cdot \cot u(x) \cdot u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arccos u(x)$	$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

4.7 Teoremas de valor medio. Aplicaciones

4.7.1 Teoremas de valor medio

Definición 4.7.1 Dada una función $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que $x_0 \in X$ es un punto **crítico** (a veces **estacionario**) si la función f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.

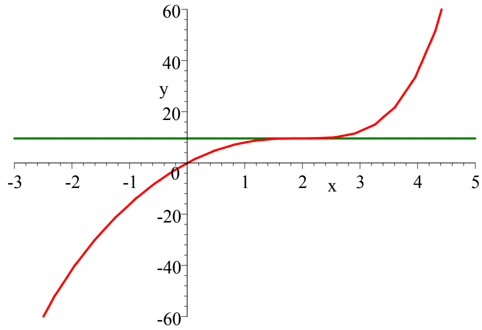
Teorema 4.7.1 *Dada una función* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *verificando:*

i. f *continua en* $[a, b]$

ii. f *derivable en* (a, b)

En estas condiciones si f *tiene un extremo (máximo o mínimo), local en* $x_0 \in (a, b)$ *entonces* x_0 *es un punto crítico de* f, *es decir* $f'(x_0) = 0$.

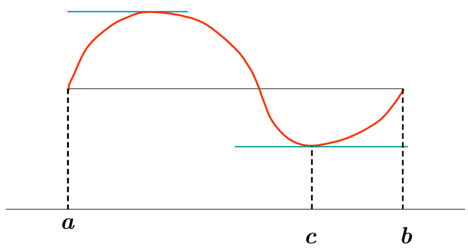
Advertencia 4.7.1 El recíproco del anterior no es cierto, como podemos ver con la función: $f(x) := \frac{x^5}{20} - 4x^2 + 12x$, su derivada $f'(x) = \frac{x^4}{4} - 8x + 12$ se anula para $x = 2$ donde f no tiene extremo



Teorema 4.7.2 (De **Rolle**):

Dada una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que*
i. f *continua en* $[a, b]$
ii. f *derivable en* (a, b)
iii. $f(a) = f(b)$
En estas condiciones existe al menos un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Gráficamente este teorema asegura, de acuerdo con la interpretación geométrica de la derivada, que la curva representativa de la función dada, tiene al menos un punto en el que la tangente es paralela a OX :



Teorema 4.7.3 *(Del **valor medio**, o de los **incrementos finitos** de **Lagrange**):*

Dada una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que*
i. f *continua en* $[a, b]$
ii. f *derivable en* (a, b)

En estas condiciones existe un $c \in (a, b)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

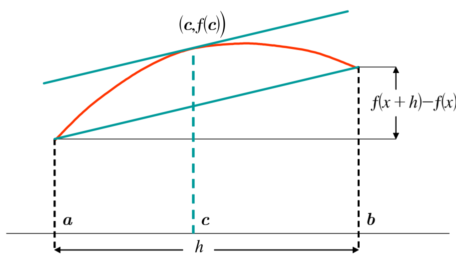
Así en las hipótesis del teorema, podemos escribir:

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, o bien poniendo $a = x$, $b = x + h$, $c = x + \theta h$ con $\theta \in (0, 1)$:x

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h) \text{ o } \Delta f = \Delta x \cdot f'(x + \theta \Delta x)$$

Que es la ***fórmula de los incrementos finitos de Lagrange***.

Esta propiedad tiene una interpretación gráfica: existe un $c \in (a, b)$, tal que la tangente a la curva, representada por $f(x)$, en el punto $(c, f(c))$, es paralela a la cuerda que une $(a, f(a))$, con $(b, f(b))$



Teorema 4.7.4 (*Del **valor medio generalizado** de **Cauchy***)

Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que:

i. f, g continuas en $[a, b]$

ii. f, g derivables en (a, b), con $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$

En estas condiciones existe un $c \in (a, b)$, tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

4.8 Aplicación al estudio de límites indeterminados

Teorema 4.8.1 (*regla de **L'Hôpital-Bernoulli***):

Dadas dos funciones $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que:

i. f, g derivables en (a, b), con $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$

ii. Se verifica una de las condiciones: $\begin{cases} \textit{1.}\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \\ \textit{2.}\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty \end{cases}$

En tal caso será $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$*, siempre que exista el* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

El resultado sigue siendo válido si se reemplaza $\lim_{x\to a^+}$ por $\lim_{x\to a^-}$

El resultado anterior permite resolver directamente las indeterminaciones de tipo $\frac{\infty}{\infty}$, o $\frac{0}{0}$. Otras formas de indeterminación se estudiaron en la sección 2.4, de entre las resolubles usando la regla de l'Hôpital-Bernoulli, tenemos:

- Caso $0 \cdot \infty$:

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, Podemos poner:

$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, que denotando $G(x) = \frac{1}{g(x)}$, resulta:

$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{G(x)}$, y estamos en la forma $\frac{0}{0}$:

En los casos sìguientes utilizamos la transformación, vista ya en 2.4:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

- Caso 0^0 :

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, la transformación mencionada la transforma en $e^{0\cdot\infty}$, dado que:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = e^{0\cdot(-\infty)}$$

Con lo que estamos en el caso anterior

- Caso ∞^0 :

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, esta forma queda:

$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = e^{0\cdot\infty}$

- Caso 1^∞ :

$\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, esta forma puede resolverse como la anterior:

$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = e^{\infty\cdot 0}$

O bien tal como se indicó en 2.4, con la transformación $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)[f(x)-1]}$

Ejemplo 4.8.1 Calcular $\lim_{x\to 2} (x^2-4)\ln(x-2)$

Es del caso $0\cdot\infty$:

$\lim_{x\to 2} (x^2-4)\ln(x-2) = \lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{-2x}{(x^2-4)^2}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)^2}{-2x(x-2)}$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)^2}{-2x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x^2-4)2x}{-2(x-2)-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{0}{-4} = 0$

Ejemplo 4.8.2 Calcular $\lim_{x\to 2}\left[\ln\left(x-2\right)\right]^{\left(x^2-4\right)}$

Es del caso ∞^0:

$\lim_{x\to 2}\left[\ln\left(x-2\right)\right]^{\left(x^2-4\right)} = \lim_{x\to 2} e^{\left(x^2-4\right)\ln[\ln(x-2)]} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{\ln[\ln(x-2)]}{\frac{1}{x^2-4}}}$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$\lim_{x\to 2}\frac{\ln[\ln(x-2)]}{\frac{1}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{\frac{1}{x-2}}{\ln(x-2)}}{\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}}{\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}} =$

$\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4\right)^2}{-2x(x-2)\ln(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{-2x(x-2)\ln(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)^2}{-2x\ln(x-2)} = 0$

Por tanto $\lim_{x\to 2}\frac{\ln[\ln(x-2)]}{\frac{1}{x^2-4}} = 0$. Es importante recordar, que el límite pedido no es este, sino $\lim_{x\to 2}\left[\ln\left(x-2\right)\right]^{\left(x^2-4\right)} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{\ln[\ln(x-2)]}{\frac{1}{x^2-4}}}$, así que: $\lim_{x\to 2}\left[\ln\left(x-2\right)\right]^{\left(x^2-4\right)} = e^0 = 1$.

Ejemplo 4.8.3 Calcular $\lim_{x\to 2}\left(x^2-3\right)^{\ln(x-2)}$

Es del caso 1^∞:

$\lim_{x\to 2} e^{[\ln(x-2)]\left(x^2-3-1\right)} = \lim_{x\to 2} e^{\left(x^2-4\right)\ln(x-2)} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x^2-4}}}$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$\lim_{x\to 2} e^{\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x^2-4}}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{\left(x^2-4\right)^2}{-2x(x-2)}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{-2x(x-2)}} =$

$\lim_{x\to 2} e^{\frac{(x-2)(x+2)^2}{-2x}} = e^0 = 1.$

4.9 Determinación de extremos locales

Vimos que si una función derivable en un punto x, tiene un extremo en x, su derivada en tal punto x es nula, es decir x es un punto crítico.

Una función puede tener extremo en un punto x_0, y no ser derivable en él, por ejemplo $y = |x|$ en el punto $x = 0$.

4.9.1 Criterio de la primera derivada

Teorema 4.9.1 *Dada una función $f : [x_0 - h, x_0 + h] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en $[x_0 - h, x_0 + h]$ y derivable en $(x_0 - h, x_0) \cup (x_0, x_0 + h)$.*

En tal caso:

i. Si $x < x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$ y $x > x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$: f tiene máximo local en x_0.

ii. Si $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$ y $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$:$f$ *tiene mínimo local en* x_0.

Definición 4.9.1 Diremos que una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es de clase $\mathcal{C}^k$ en I, lo que se denota $f \in \mathcal{C}^k(I)$, si la función y sus derivadas de orden menor o igual que k, son continuas en I.

4.9.2 Criterio de la segunda derivada

Teorema 4.9.2 *Dada una función* $f : [x_0 - h, x_0 + h] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que:*
i. $f \in \mathcal{C}^2([x_0 - h, x_0 + h])$.
ii. $f'(x_0) = 0$
En estas condiciones:
1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ *tiene mínimo local en* x_0.
2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ *tiene máximo local en* x_0.

4.9.3 Caso de la segunda derivada nula

Considerando una función f de clase $\mathcal{C}^n$, caso de tener extremo en un punto x_0, deberá ser $f'(x_0) = 0$, supongamos además que $f''(x_0) = 0$, o más generalmente que $f^{(k}(x_0) = 0$, $2 \leq k < n$, con lo que el criterio precedente no decide sobre la existencia de extremo. El siguiente teorema da un criterio basado en el orden de la primera derivada no nula en x_0:

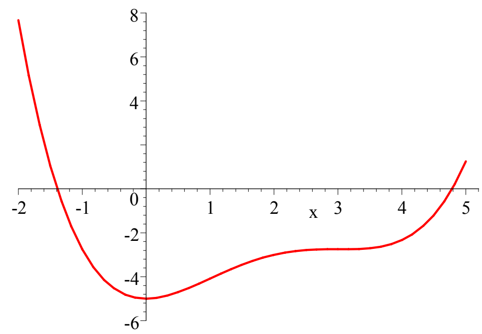
Teorema 4.9.3 *Dada una función* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *verificando:*
i f *es de clase* C^n *en un entorno* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *de un punto* $x_0 \in D$
ii. $f^{(k}(x_0) = 0$, $k < n$
iii. $f^{(n}(x_0) \neq 0$
En estas condiciones:

$$1.\ \textit{si } n \textit{ es par y} \begin{cases} a.\ f^{(n}(x_0) > 0 & \Rightarrow \quad \textit{tiene mínimo local en } x_0 \\ b.\ f^{(n}(x) < 0 & \Rightarrow \quad \textit{tiene máximo local en } x_0 \end{cases}$$

$$2.\ \textit{si } n \textit{ es impar y} \begin{cases} a.\ f^{(n}(x_0) > 0 & \Rightarrow \quad f \textit{ es creciente en } x_0 \\ b.\ f^{(n}(x) < 0 & \Rightarrow \quad f \textit{ es decreciente en } x_0 \end{cases}$$

En realidad este criterio incluye los dos anteriores.

Ejemplo 4.9.1 Determianr los extremos de $y = \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5$
$y' = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$, que se anula para $x = 0$ y $x = 3$
$y'' = x^2 - 4x + 3$, para $x = 0$ vale 3, por lo que hay un mínimo en $(0, -5)$
Pero para $x = 3$, se anula.
$y''' = 2x - 4$, que para $x = 3$, vale $+2$, por lo que al ser la primera derivada no nula (para $x = 3$), de orden impar, y positiva, la función crece en $x = 3$.



4.10 Asíntotas

Definición 4.10.1 Diremos que una recta es una **asíntota** de una curva de ecuación $y = f(x)$ si la distancia entre un punto de la curva, y la recta tiende a cero, cuando la distancia entre tal punto de la curva y $(0,0)$, tiende a infinito.

Hay tres tipos de asíntotas:

a. asíntotas **horizontales**:

f tiene una asíntota horizontal $y = b$ si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \neq \infty$

b. asíntotas **verticales**:

f tiene una asíntota vertical $x = a \neq \infty$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

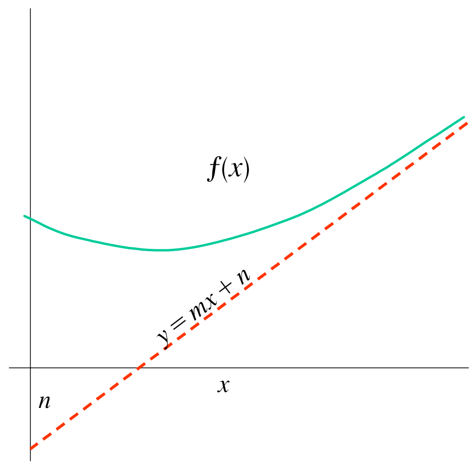
c. asíntotas **oblícuas**:

f tiene una asíntota *oblícua* $y = mx + n$ si la distancia entre esta recta y $(x, f(x))$ tiende a cero al tender x a $\pm\infty$

Teorema 4.10.1 *(Determinación de las asíntotas oblícuas):*

Si $y := mx + n$ $(0 \neq m \neq \infty, n \neq \infty)$ es una asíntota oblícua de la curva representada por $f(x)$ entonces:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$$

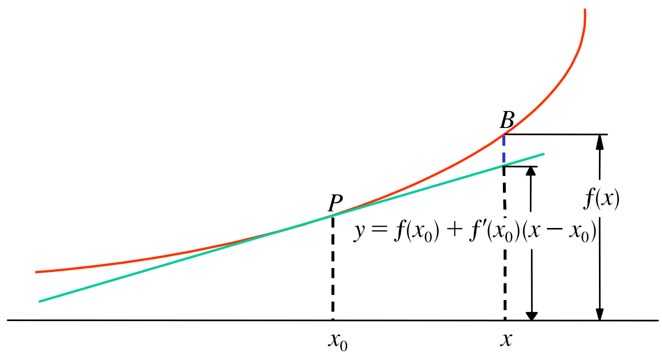


Advertencia 4.10.1 Suele decirse, que una curva que admite asíntota horizontal no admite asíntota oblícua, esto es cierto con matices: si hay asíntota horizontal con $x \to +\infty$ no hay asíntota oblícua con $x \to +\infty$, pero puede haberla con $x \to -\infty$, lo mismo puede decirse si hay asíntota horizontal con $x \to -\infty$. Ver por ejemplo el ejercicio resuelto n^{o}10.

4.11 Concavidad

Definición 4.11.1 Diremos que una curva es **cóncava hacia arriba** "$\cup$", (o convexa hacia abajo), entorno de un punto x_0 si, entorno de x_0 la curva está situada por encima de la tangente a la curva en $x_{0.}$ De manera análoga se define la concavidad hacia abajo" $\cap$". Cuando, por el contrario, en un semientorno de x_0 la curva está por encima, y en otro por debajo de la tangente, diremos que en x_0 hay un **punto de inflexión**.

Ejemplo 4.11.1 En la figura adjunta, la curva tiene una concavidad de tipo $\cup$ en x_0:



Teorema 4.11.1 *Dada la ecuación $y = f(x)$, de una curva. Si entorno de un punto x_0 la función f es de clase C^2, y:*

i. $f''(x) > 0$ en tal entorno la curva es cóncava hacia las YY positivas.

ii. $f''(x) < 0$ en tal entorno la curva es cóncava hacia las YY negativas.

iii. $f''(x)$ cambia de signo al pasar de valores menores que x_0 a valores mayores que x_0, en x_0 la curva tiene un punto de inflexión.

4.11.1 Caso de la segunda derivada nula

Teorema 4.11.2 *Dada la ecuación de una curva $y = f(x)$. Si entorno de un punto x_0, se verifica que f* es de clase $\mathcal{C}^n$ en tal entorno, *con $f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1}(x_0) = 0$, $f^{(n}(x_0) \neq 0$:*

i. caso de ser n par*:*

1. si $f^{(n}(x) > 0$ la curva es cóncava hacia las YY positivas entorno de x_0.

2. si $f^{(n}(x) < 0$ la curva es cóncava hacia las YY negativas entorno de x_0.

ii. caso de ser n impar, *la curva tiene un punto de inflexión en x_0 siendo:*

1. creciente si $f^{(n}(x_0) > 0$

2. decreciente si $f^{(n}(x_0) < 0$.

Ejemplo 4.11.2 En el ejemplo anterior (4.9.1), la función $y = \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5$

$y' = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$,

$y'' = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, es negativa en $(1,3)$, por lo que es cóncava hacia abajo "$\cap$", y cóncava hacia arriba "$\cup$",en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, y'' se anula $x = 1$ y $x = 3$.

$y''' = 2x - 4$, que para $x = 3$, vale $+2$, por lo que al ser la primera derivada no nula (para $x = 3$), de orden impar, y positiva, la función crece en $x = 3$, a la inversa en $x = 1$, es negativa por lo que decrece, habiendo punto de inflexión en ambos casos, como se aprecia en la figura.