

Tema 3

Continuidad

Ejercicios Resueltos

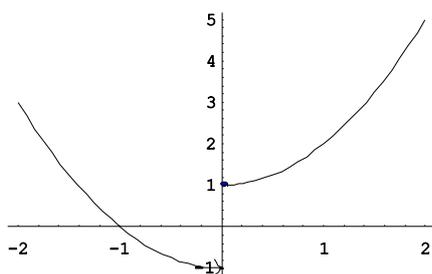
Ejercicio 1

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Solución:

La función puede expresarse como $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Para representarla basta considerar dos arcos de parábola:



Es evidente la continuidad en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

En el punto $x_0 = 0$, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$$

Por tanto, f es continua por la derecha en $x_0 = 0$, pero no es continua presentando una discontinuidad de salto, con salto (diferencia entre los límites laterales) igual a 2.

Ejercicio 2

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Solución:

La función presenta en $x_0 = 0$ (donde no está definida) una discontinuidad de salto infinito por ser los límites laterales infinitos de signos contrarios: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

En $x_0 = 1$, se tiene que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{2} = f(1)$, luego

solo se tiene continuidad por la derecha. La discontinuidad es de salto finito.

Por tanto, la función es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Ejercicio 3

Halla los valores de los parámetros a y b que hacen continua en \mathbb{R} a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -3 \sin x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Solución:

Por la propia definición la función ya es continua en $(-\infty, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \infty)$. Para que sea continua en $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ y en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ deben coincidir los límites laterales, es decir:

En $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, debe ser $-3 \sin(-\frac{\pi}{2}) = a \sin(-\frac{\pi}{2}) + b \rightarrow 3 = -a + b$

Y en $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $a \sin(\frac{\pi}{2}) + b = \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow a + b = 0$

De ambos resultados se concluye que los valores buscados son $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{2}$

Ejercicio 4

Las funciones $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ y $g(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$, no están definidas en el punto $x_0 = 0$.

¿Qué discontinuidad presentan en $x_0 = 0$? ¿Pueden definirse en 0 de manera que sean continuas en \mathbb{R} ?

Solución:

$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ presenta en $x_0 = 0$ una discontinuidad de segunda especie porque no existe ninguno de los límites laterales. Por tanto, $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ será continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ siendo imposible ampliar su dominio al 0.

Como $-1 \leq \sin \frac{\pi}{x} \leq 1$ el $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} = 0 \cdot \text{acotada} = 0$ y, ya que existe el

límite, puede definirse la función asignándole ese valor, es decir, $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

consiguiendo así hacerla continua en \mathbb{R} .

Ejercicio 5

¿Qué tipo de discontinuidad presenta en $x_0 = 0$ la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$?

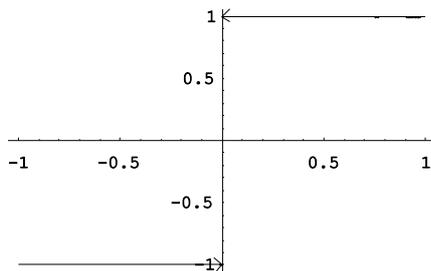
Solución:

Teniendo en cuenta que al aproximarnos al cero se tienen valores negativos a su izquierda y positivos a su derecha, los límites laterales de $\frac{1}{x}$ son $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, por tanto $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{\infty} = \infty$. Se trata de una discontinuidad de salto infinito (límites laterales diferentes y uno de ellos es ∞)

Ejercicio 6

Representa la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Cumple el teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$?

Solución:



Aunque toma valores de signos contrarios en los extremos del intervalo, no cumple el teorema de Bolzano por no ser continua en el punto $x = 0 \in (-1, 1)$

Ejercicio 7

¿Existe algún número real igual a su cubo menos una unidad ?

Solución:

El número buscado debe satisfacer la ecuación $x = x^3 - 1 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 = 0$.

Considerando $f(x) = x^3 - x - 1$, por ser continua en \mathbb{R} y en particular en $[1, 2]$, como $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 5 > 0$, por el teorema de Bolzano se concluye que debe existir un número $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f(\alpha) = 0$, es decir, tal que $\alpha = \alpha^3 - 1$.

Ejercicio 8

Aplica el Teorema de Bolzano para probar que las gráficas de $f(x) = Lx$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y localízalo aproximadamente.

Solución:

Que las gráficas de $f(x) = Lx$ y $g(x) = e^{-x}$ se corten, significa que debe existir un punto en el que coincidan, es decir en el que $Lx - e^{-x} = 0$. Se trata de encontrar un intervalo $[a, b]$ en el que la función $Lx - e^{-x}$ sea continua y tome valores de signos contrarios en los extremos. Eso ocurre tomando $a=1$ y $b=2$ porque, además de la continuidad, $L1 - e^{-1} = -0.367879 < 0$ y $L2 - e^{-2} = 0.557812 > 0$.

Nota: Para lograr una aproximación mejor puede subdividirse el intervalo $[1, 2]$ en dos partes iguales $[1, 1.5]$ y $[1.5, 2]$. Elegir aquel intervalo en el que la función $Lx - e^{-x}$ tome valores de signos contrarios en los extremos, y repetir el proceso las veces que se quiera.

Ejercicio 9

Dada la función definida por $f(x) = x^3 + x^2 - \cos \pi x$, demuestra que existe un valor $x = \alpha$ positivo y menor que 2, que verifica que $f(\alpha) = 3$.

Solución:

Como $f(0) = -\cos 0 = -1$, $f(2) = 8 + 4 - \cos 2\pi = 11$ y $f(x) = x^3 + x^2 - \cos \pi x$ es continua en el intervalo $[0, 2]$, por el teorema de los valores intermedios, debe alcanzar cualquier valor comprendido entre -1 y 11. En particular, debe existir un valor $x = \alpha \in (0, 2) / f(\alpha) = 3$.

Ejercicio 10

La función $f(x) = \frac{1}{x-3}$ es continua en el intervalo $(3, 6]$, pero sin embargo no alcanza un máximo en dicho intervalo. ¿Contradice el teorema de Bolzano-Weierstrass?

Solución:

No lo contradice puesto que el intervalo donde la función es continua no es cerrado.

Ejercicios Propuestos

(Las soluciones se encuentran al final)

1.- Dada la función $f(x) = \frac{xLx}{x-1}$ definida en $(0, 1) \cup (1, \infty)$, define $f(0)$ y $f(1)$ para que sea continua en $[0, \infty)$

2.- ¿Tiene la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ máximo y mínimo en el intervalo $[0, 5]$? ¿Y $g(x) = \frac{3}{x+2}$ en el intervalo $[-3, 2]$?

3.- Dadas las funciones $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + Lx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, comprueba que son continuas en \mathbb{R} .

4.- Estudia en $x = 1$, $x = e$ la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 0 \\ \sin \frac{\pi x}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ Lx & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ \frac{x}{e} & \text{si } x > e \end{cases}$.
Determina a para que sea continua en $x = 0$.

5.- Si f y g son las funciones $f(x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $g(1) = 0$, $g(x) = 2$, $\forall x \neq 1$, demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$. ¿Contradice este resultado la propiedad sobre la continuidad de la función compuesta?

6.- Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} & \text{si } x < -3 \\ 1 & \text{si } x = -3 \\ -e \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} & \text{si } x > -3 \end{cases}$

7.- ¿Es continua en $x = 0$ la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + 2^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$?

8.- Demuestra que $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$ es continua en \mathbb{R} .

9.- Aplicando el Teorema de Bolzano, comprueba que la ecuación $e^x + 2x = 0$ tiene una raíz real.

10.- ¿Tiene la función $f(x) = x^2$ extremos relativos en \mathbb{R} ? ¿Y en el intervalo $[2, 5]$?

11.- ¿Es ampliable a \mathbb{R} el dominio de la función $f(x) = 2 + \sin \frac{1}{x}$?

12.- Escribe un ejemplo de una función que presente en $x = 0$ una discontinuidad evitable, en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito, y que sea continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

13.- ¿Qué tipo de discontinuidad presenta en $x = 1$ la función $f(x) = \frac{x^2 + 4}{|x - 1|}$? ¿Podrías definir $f(1)$ para que fuese continua en \mathbb{R} ?

14.- ¿Tiene la ecuación $x^5 - 3x = 1$ alguna raíz comprendida entre 1 y 2?

15.- ¿Existe algún valor de α para el que $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ L[\sin^2(x + \alpha) + 1] & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ sea continua en $(0, \infty)$?

Soluciones:

1.- $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$

2.- $f(x)$ presenta un máximo en el punto $(0, 1)$ y un mínimo en $(5, 1/26)$; $g(x)$ no presenta extremos en $[-3, 2]$ porque no es continua en $-2 \in (-3, 2)$.

4.- Para que sea continua en $x = 0$ debe ser $a = 0$. En $x = 1$ es continua por la derecha pero no lo es por la izquierda. Por tanto, no es continua. Presenta discontinuidad de salto finito. En $x = e$ es continua.

5.- No contradice el resultado porque g no es continua en $f(0) = 1$.

6.- Continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$. En $x = -3$ presenta discontinuidad evitable.

7.- Sí es continua.

10.- En \mathbb{R} tiene mínimo en $(0, 0)$ y no tiene máximo. En el intervalo cerrado $[2, 5]$, como consecuencia del Teorema de Bolzano-Weierstrass, mínimo en el punto $(2, 4)$ y máximo en el punto $(5, 25)$.

11.- No, porque en $x = 0$ presenta discontinuidad no evitable.

$$12.- f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

13.- Presenta una discontinuidad infinita (límites laterales infinitos del mismo signo), con lo que el dominio no sería ampliable.

14.- Entre 1 y 2 tiene una raíz.

15.- Sí, por ejemplo $\alpha = -1$.