Tema 2

Límites de Funciones

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Demuestra, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x \to 2} (x^2 + x + 2) = 8$

Solución:

$\lim_{x \to 2} (x^2 + x + 2) = 8$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 + x + 2 - 8| < \varepsilon$

Pero $|x^2 + x + 2 - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 + x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x - 2)(x + 3)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2||x + 3| < \varepsilon$

Puede tomarse $\delta < 1$ para simplificar los cálculos, y con $|x - 2| < \delta$ se tiene $x \in (1, 3)$ y $|x + 3| < 6$. Entonces $|x - 2||x + 3| < 6\delta$. Tomando $\delta =$ mínimo $\{1, \varepsilon/6\}$, queda demostrado que $|x^2 + x - 6| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - 2| < \delta$.

Ejercicio 2

Demuestra, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty \quad \Leftrightarrow \left[\forall k \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta > 0\ /\ |x - 1| < \delta \ \Rightarrow \ \frac{1}{(x - 1)^2} > k\right]$$

Pero, $\frac{1}{(x - 1)^2} > k \Leftrightarrow 0 < (x - 1)^2 < \frac{1}{k}$. Por otra parte, si $0 < |x - 1| < \delta$ será $|x - 1|^2 < \delta^2$, de

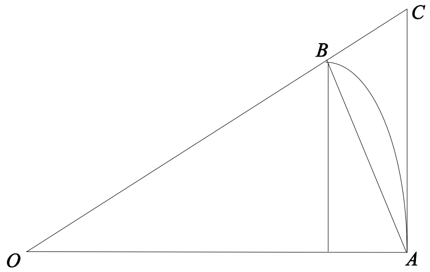
donde $\frac{1}{|x - 1|^2} > \frac{1}{\delta^2}$ Basta tomar por tanto $\delta^2 < \frac{1}{k}$, o lo que es lo mismo, $\delta < \frac{1}{\sqrt{k}}$. De esta forma se consigue que si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $\frac{1}{|x - 1|^2} > \frac{1}{\delta^2} > k$

Ejercicio 3

Demuestra que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Solución:

Se probará utilizando la propiedad 4 del apartado 2.2.



En la figura puede observarse que :

área triángulo OAB < área sector OAB < área triángulo OAC

Si x es la medida en radianes del arco AB y el radio es OA = 1, resulta: $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$

Entonces para todo x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\sin x < x < \tan x$

Y por tanto $\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\tan x}$. Multiplicando por $\sin x > 0$ se obtiene $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ desigualdad ésta que teniendo en cuenta que todas las funciones que intervienen son pares, es válida para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ el $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ por ser $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

Ejercicio 4

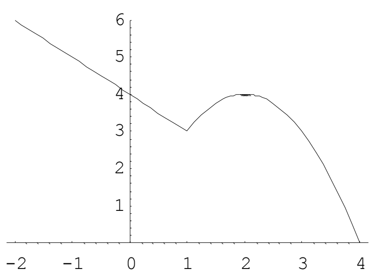
¿Existe el límite de $f(x) = \begin{cases} 4 - x & si\ x < 1 \\ 4x - x^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ cuando x tiende a 1?

Solución:

Calculando los límites laterales:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (4 - x) = 4 - 1 = 3$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (4x - x^2) = 4 - 1 = 3$

Puede concluirse, por tanto que existe el límite y vale $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$



En la gráfica puede observarse las dos partes diferentes que constituyen la función, a la izquierda del 1 una recta y a su derecha una parábola, pero en el 1 toman el mismo valor.

Ejercicio 5

Estudia la existencia del $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \frac{|x|}{x}\right)$

Solución:

Teniendo en cuenta que $|x| = x$ si $x \to 0^+$ y $|x| = -x$ si $x \to 0^-$, se tiene:

$$\lim_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{-x}{x}\right) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{x}{x}\right) = 1-1 = 0$$

Los límites laterales existen, pero como no son iguales se concluye que no existe el límite.

Ejercicio 6

Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2+3}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(3+x)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (3+x) = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2+3}\right) = (-\infty + \infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2+3}\right)\left(x - \sqrt{x^2+3}\right)}{\left(x - \sqrt{x^2+3}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3}{\left(x - \sqrt{x^2+3}\right)} = \left(\frac{-3}{-\infty}\right) = 0$

Ejercicio 7

Calcula el valor de *a* para que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 4$

Solución:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^{x} = \left(1^{\infty}\right) = e^{\lim_{x \to \infty} \left[\left(\frac{x+a}{x-a} - 1\right)x\right]} = e^{\lim_{x \to \infty} \left[\left(\frac{x+a-x+a}{x-a}\right)x\right]} = e^{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2ax}{x-a}\right)} = e^{2a}$$

Y para que $e^{2a} = 4 \Rightarrow 2a = L4 \Rightarrow a = \frac{1}{2} L4 = L(4^{1/2}) = L\sqrt{4} = L2$

Ejercicio 8

Halla las asíntotas horizontales y verticales de $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x}$

Solución:

Como $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x} = 2 \Rightarrow y = 2$ es una asíntota horizontal

Y por ser $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x} = \infty$, $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x} = \infty \Rightarrow x = 0$, $x = 2$ son asíntotas verticales.

Ejercicio 9

Calcula el $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt[3]{x}}$

Solución:

Al igual que para la diferencia de cuadrados se tiene que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, para la diferencia de cubos es $a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$. Por tanto:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{1^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2\right)\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}{1} = 3$$

Ejercicio 10

¿Para qué valores del parámetro *a* existe el $\lim_{x \to 0} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si \ x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + x + 1 & si \ x > 0 \end{cases}$

Solución:

Hallando los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{ax} = e^0 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2} + x + 1 = 1$$

Por tanto, el límite existe y vale $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ para cualquier valor del parámetro.

Ejercicios Propuestos

(Las soluciones se encuentran al final)

1.- Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, calcula $\lim_{x \to a} \frac{\sin(x - a)}{x^2 - a^2}$

2.- Pon un ejemplo de una función $f(x)$ que verifique $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

3.- Calcula los siguientes límites, si existen:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ b) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1} \right)$

4.- Definiendo la función "parte entera" *E(x)* = mayor número entero menor o igual que x, demuestra que no existe el $\lim_{x \to 3} E(x)$.

5.- ¿Existe el $\lim_{x \to -4} \frac{|x + 4|}{x + 4}$?

6.- Demuestra, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x \to 3} (6x + 1) = 19$

7.- ¿Con qué proximidad a 2 se debe tomar x para que $8x - 5$ se encuentre a una distancia de 11 menor que a) 0.01 b) 0.001?

8.- Indica la indeterminación que presentan y resuelve los siguientes límites en el infinito:

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ b) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{\frac{x + 2}{x + 1}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x + 1}}}$

9.- Comprueba que $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = 1$

10.- Halla las asíntotas horizontales y verticales de $f(x) = L\left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)$

Soluciones:

1.- $\frac{1}{2a}$

2.- Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

3.- a) 1/2 b) 3/2

4.- El límite no existe por ser distintos los límites laterales.

5.- El límite no existe por ser distintos los límites laterales.

7.- a) $\delta < \frac{0.01}{8} = 0.00125$ b) $\delta < \frac{0.001}{8} = 0.000125$

8.- a) 1/2 b) 1

10.- y=0, x=1, x=-1