

Apéndice B

Algunas funciones elementales

Ejercicios resueltos

1. Escribe el término en x^5 que aparece al desarrollar $(x+2)^9$.

$(x+2)^9$ es la suma de todos los términos de la forma $\binom{9}{i}x^{9-i}2^i$ con i entre 0 y 9; x^5 aparece para $i=4$, y el correspondiente término es

$$\binom{9}{4}x^{9-4}2^4 = 126 \cdot 16x^5 = 2016x^5$$

2. Calcula la suma de todos los números combinatorios

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{i} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Sabemos que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Si $a=b=1$ quedará

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} 1^n 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 1^n \Rightarrow$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{i} + \dots + \binom{n}{n}$$

Luego la suma de los números combinatorios vale 2^n .

3. Halla el dominio de la función $y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$.

Como sabemos que una raíz cuadrada sólo está definida si el radicando es mayor o igual a 0, entonces $y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ estará definida si

$$y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x \geq 0$$

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x \leq 1 \forall x$, la función dada está definida para todo número real.

4. Halla el dominio de la función $y = \ln(x^2 - 16)$

Como los logaritmos sólo están definidos para valores positivos de la variable, $y = \ln(x^2 - 16)$ está definida si y sólo si

$$x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow x > 4 \text{ ó } x < -4$$

Es decir, para $x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$.

5. Hallar $\cos \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ y $\cotan \alpha$ si $\alpha = \operatorname{arcsen}(2/3)$.

$\alpha = \operatorname{arcsen}(2/3) \Rightarrow \operatorname{sen} x = 2/3$; entonces

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - \frac{2^2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{3}{2}$$

$$\cotan x = \frac{\cos x}{\sen x} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

6. Resolver $2^{x-3} = 16$.

Se trata de una ecuación exponencial. Expresamos el segundo miembro como potencia de 2 e igualamos los exponentes.

$$2^{x-3} = 2^4 \Rightarrow x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7$$

7. Expresa el logaritmo $\log \left[\frac{x(x+2)}{(x+3)^2} \right]$ como una suma o resta de logaritmos.

$$\begin{aligned} \log \left[\frac{x(x+2)}{(x+3)^2} \right] &= \log[x(x+2)] - \log(x+3)^2 = \\ &= \log(x) + \log(x+2) - 2 \log(x+3) \end{aligned}$$

8. Calcular $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

Cuando $x \rightarrow \infty$ su logaritmo neperiano también lo hace, por lo aparece una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que se puede eliminar directamente aplicando la regla de L'Hopital. Para ello derivamos el numerador y denominador,

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

9. Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sen 3x}{1 - 2\cos x}$

Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = \frac{\pi}{3}$ por lo que aparece una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que se puede eliminar aplicando la regla de L'Hopital.

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(\operatorname{sen} 3x)'}{(1 - 2\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3\cos 3x}{0 - 2(-\operatorname{sen} x)} =$$

$$= \frac{3\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{2\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}} = \frac{3\cos \pi}{2\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}} = \frac{-3}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}$$

10. Demostrar las siguientes relaciones:

a) $\operatorname{senh} x + \operatorname{cosh} x = e^x$.

$$\operatorname{senh} x + \operatorname{cosh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x$$

b) $\operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \operatorname{senh}^2(x) = \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2 - 2e^x e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosh}^2(x) = \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2 + 2e^x e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

Entonces

$$\operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1$$

Ejercicios propuestos (las soluciones se encuentran al final)

1. Sin calcular los números combinatorios, encuentra los x que hacen que se cumplan.

$$\text{a) } \binom{9}{4} + \binom{9}{3} = \binom{y}{x}$$

$$\text{b) } \binom{y}{x} + \binom{y}{x+1} = \binom{14}{6}$$

2. Encuentra a y b para que la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax + b$ pase por los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$.

3. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^2 - 1}$$

4. Encuentra el recorrido de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 2x + 4$$

$$\text{b) } g(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$$

5. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{2^x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{2x} + x^2}{x3^x + 1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_3 x^2}{\log_2 x}$$

6. Halla el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \ln \frac{2x}{2-x}$$

$$\text{b) } g(x) = \log_2 e^{3x}$$

7. Resolver $5^{2x-9} = 625$.

8. Resolver $(\sqrt[3]{2})^{2-x} = 2^{x^2}$.

9. Resolver $\ln(3x+4) - \ln(2-5x) = 2 \ln 5$.

10. Resolver $\log_{10}(x^2 + x + 44) = 2$

11. Usando las propiedades de los logaritmos, simplifica las siguientes expresiones.

a) $\frac{1}{2} \ln(4t^4) - \ln 2$

b) $3 \ln \sqrt[3]{t^2 - 1} - \ln(t+1)$

c) $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right)$

12. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

b) $\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\operatorname{tan} x}$

13. Sabiendo que $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y que $\alpha = \operatorname{arcsec}(-\sqrt{5})$, halla $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{cos} \alpha$, $\operatorname{tan} \alpha$ y $\operatorname{cosec} \alpha$.

14. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

15. Dado $\operatorname{senh} x = 4/3$ halla los valores del coseno y la tangente hiperbólicas.

Soluciones a los ejercicios propuestos

1. a) $x = 4$ $y = 10$
b) $x = 5$ $y = 13$
2. $a = -1$ $b = 1$
3. a) $-\infty$
b) $5/2$
4. a) $[4, +\infty)$
b) $[0, +\infty)$
5. a) ∞
b) ∞
c) $\frac{\ln 4}{\ln 3}$
6. a) $(0, 2)$
b) $(-\infty, +\infty)$
7. $x = 13/2$
8. $x_1 = 2/3$ $x_2 = -1$
9. $x = 23/64$
10. $x_1 = 7$ $x_2 = -8$
11. a) $2 \ln t$
b) $\ln(t-1)$
c) $\ln(x-3)$
12. Ambas existen en todo \mathbb{R} excepto el conjunto de puntos en que se anula el $\sin x$, que es $\{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
13. $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\tan \alpha = -2$ $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$
14. $1/6$
15. $\cosh x = \frac{5}{3}$; $\tanh x = \frac{4}{5}$