TEMA 10: POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

Antes de introducir los conceptos que corresponden a este apartado, haremos un repaso de dos conceptos que necesitamos, matrices y determinantes, así como algunas de sus propiedades .

MATRICES

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales.

Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc...

La utilización de matrices (arrays) constituye actualmente una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas : hojas de cálculo, bases de datos,...

Se llama matriz de orden m $\times$ n a un conjunto de m $\times$ n elementos de un cuerpo *K* distribuidos en m filas y n columnas. Se representan encerrados en un paréntesis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Al conjunto de todas las matrices de orden m $\times$ n lo representaremos como M $_{m\times n}$ (*K*)

CONCEPTO DE MATRIZ

Una matriz es un conjunto de elementos de un cuerpo *K* ordenados en filas y columnas.

Definición 10.1.- *Se llama matriz de orden "m* **×** *n" a un conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m filas y en n columnas. El orden de una matriz también se denomina* <u>*dimensión*</u> *o* <u>*tamaño*</u>*, siendo m y n números naturales. Si m=n, se dice que A es una matriz* cuadrada*.*

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: A, B, C, ... y los elementos de las mismas con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar ocupado: a, b, c, ... Un elemento genérico que ocupe la fila **i** y la columna **j** se escribe a_{ij} . Si el elemento genérico aparece entre paréntesis también representa a toda la matriz :

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ siendo sus filas: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ y sus columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

El número total de elementos de una matriz $A_{\mathbf{m\times n}}$ es m.n. En matemáticas, tanto las **Listas** como las **Tablas** reciben el nombre genérico de matrices.

Definición 10.2.- Dos matrices $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ y $B = \left(b_{ij}\right)_{p\times q}$ son iguales, sí y solo si, tienen en los mismos lugares elementos iguales, es decir : m = p , n = q y $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i,\ \forall j$

OPERACIONES CON MATRICES.- SUMA DE MATRICES

Definición 10.3 .- La suma de dos matrices $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ y $B=\left(b_{ij}\right)_{p\times q}$ *de la misma dimensión (equidimensionales)* ***: m = p y n = q*** *es otra matriz*

$$C=A+B=\left(c_{ij}\right)_{m\times n} = \left(a_{ij}+b_{ij}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

La suma de matrices es una ley de composición interna con las siguientes PROPIEDADES :

- Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C
- Conmutativa : A + B = B + A
- Elemento neutro : (matriz cero $0_{m\times n}$) , 0 + A = A + 0 = A
- Elemento simétrico : (matriz opuesta -A) , A + (-A) = (-A) + A = 0

Al conjunto de las matrices de dimensión m×n cuyos elementos son números reales lo vamos a representar por $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y como hemos visto, por cumplir las propiedades anteriores, ($\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, +) es un **grupo abeliano**.

PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UNA MATRIZ

Definición 10.4 .- Para multiplicar un escalar por una matriz se multiplica el escalar por todos los elementos de la matriz, obteniéndose otra matriz del mismo orden.

$$A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda.A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda.A=\begin{pmatrix} \lambda.3 & \lambda.1 & \lambda.(-2) \\ \lambda.(-3) & \lambda.5 & \lambda.2 \end{pmatrix}$

El producto de matrices por escalares es una ley de composición externa con las siguientes
PROPIEDADES :

a) Asociativa : $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$
b) Distributiva I: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
c) Distributiva II: $\left(\lambda+\mu\right)A=\lambda A+\mu A$
d) Elemento neutro de escalares: 1.A = A . 1 = A

$\forall\lambda,\mu,1\in\mathbb{R},\forall A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}$

Por lo tanto $\left(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),+,.\right)$ es un espacio vectorial real.

PRODUCTO DE MATRICES

Definición 10.5 .- *Para multiplicar una matriz A por una matriz B, deben ser la matriz A de orden m×n y la matriz B, de orden n×p, es decir, A debe tener el mismo número de columnas que filas tiene B. El resultado será otra matriz C de orden m×p. Los elementos de C se obtienen de la siguiente forma*:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}.b_{kj}$$

<u>Ejemplo:</u> Sea $A=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 \end{pmatrix}$ Calcular A.B

Solución: $A.B=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ra_1+sb_1 & ra_2+sb_2 & ra_3+sb_3 \\ ta_1+ub_1 & ta_2+ub_2 & ta_3+ub_3 \end{pmatrix}$

<u>Ejemplo2:</u>

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ calcular . A^2

Solución:

$$A.A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5.5+(-4)2+2(-4) & 5(-4)+(-4)(-1)+2.4 & 5.2+(-4)1+2(-1) \\ 2.5+(-1)2+1(-4) & 2(-4)+(-1)(-1)+1.4 & 2.2+(-1)1+1(-1) \\ -4.5+4(-2)+(-1)(-4) & (-4)(-4)+4(-1)+(-1)4 & (-4)2+4.1+(-1)(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Definición 10.6.- *Se llama matriz inversa de una matriz cuadrada A y la representamos por* A^{-1} *, a la matriz que verifica la siguiente propiedad :*

$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$

PROPIEDADES :

1) $A^{-1}.A=A.A^{-1}=I_n$
2) $(A\,.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$
3) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
4) $(k.A)^{-1}=\dfrac{1}{k}.A^{-1}$
5) $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$

La matriz inversa de una matriz cuadrada, si existe, es única.

RANGO DE UNA MATRIZ

Definición 10.7.- *Se llama rango de una matriz al número máximo de vectores columna, (o bien de vectores fila), linealmente independientes, que la forman*. *(véase espacios vectoriales en el tema 2)*

PROPIEDADES:

1ª. - El rango de una matriz no varía si a una columna o a una fila se le suma una combinación lineal de otras columnas o filas.
2ª. - El rango de una matriz no varía si se suprime una columna o fila que sea combinación lineal de otras columnas o filas.
3ª. - El rango de una matriz no varía si se multiplica una columna o una fila por un escalar no nulo.
4ª. - El rango de una matriz es igual al de su matriz traspuesta.
5ª. - El rango de una matriz no varía al intercambiar dos filas o dos columnas.

Estas propiedades nos dicen también, que, a la hora de calcular rangos, si aparece una fila, o una columna de ceros, se puede eliminar.

DETERMINANTES. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Definición 10.8 .- Sea $A=\left(a_{ij}\right)_n$ una matriz cuadrada con coeficientes en un cuerpo K (con *n* filas y *n* columnas). El determinante de A es un elemento de *K* cuya definición es bastante compleja, por lo que nos preocuparemos solo de cómo se calcula en la práctica.

En los casos particulares de los determinantes de orden 2 y 3, que serán los que más necesitaremos calcular, tenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right)$$

(Regla de Sarrus)

Definición 10.9 .- *Se llama adjunto del elemento* a_{ij} *, y se denota por* A_{ij} *, al determinante de la matriz* M_{ij} *acompañado del signo* $(-1)^{i+j}$ *,donde* M_{ij} *es la submatriz que obtenemos al suprimir en A la fila i y la columna j ; el determinante* $\left|M_{ij}\right|$ *recibe el nombre de menor complementario del elemento* a_{ij} *.*

adjunto$\left(a_{ij}\right) = A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$

Cuando el orden de la matriz A es superior a 3, se puede calcular el determinante de A, de manera recursiva eligiendo una fila cualquiera (o columna) y calculando determinantes de orden una unidad inferior. Por ejemplo eligiendo la fila i-ésima, tenemos que:

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left|A_{ij}\right|$$

La matriz $Adj(A) = (A_{ij})$ cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de A se llama *matriz adjunta* de A.

Ejemplo:

Desarrollando por la primera columna, calcular $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^4 - 1$$

Decimos que una matriz cuadrada es *regular* si su determinante es distinto de cero, y es *singular* si su determinante es igual a cero.

$$|A| \neq 0 \Rightarrow A \text{ Regular}$$
$$|\mathrm{A}| = 0 \Rightarrow A \text{ Singular}$$

Una matriz A tiene inversa si, y sólo si, su determinante es no nulo, es decir cuando A es regular. Además, en este caso, la matriz inversa de A es

$$\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{|A|}\left(Adj\left(A\right)\right)^{T}$$

Proposición 10.8 *El Rango de una matriz es el orden del mayor de los menores distintos de cero.*

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

- Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, se verifica: det (A · B) = det (A) · det (B)

Ejemplo: Calcular determinante de A.B, siendo $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\1&1&0\end{pmatrix}$

<u>**Solución:**</u> $\det(A)=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&2&1\end{vmatrix}=4-1=3$ y $\det(B)=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&5\\1&1&0\end{vmatrix}=(10+9)-(12+5)=2$

$$A.B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&8&11\\7&10&13\\8&11&13\end{pmatrix}\to\det(A.B)=\det\begin{vmatrix}5&8&11\\7&10&13\\8&11&13\end{vmatrix}=6$$

Por lo tanto det(A.B) = 6 = det (A) . det (B) = 2.3= 6

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en esa línea los primeros y segundos sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial. det(L1 + L'1, L2, L3...) = det (L1, L2, L3...) + det (L'1, L2, L3...)

Ejemplo:

$$21=\begin{vmatrix}1+2&2+4&3+6\\1&3&5\\7&4&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&5\\7&4&8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&4&6\\1&3&5\\7&4&8\end{vmatrix}=7+14=21$$

- Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada por un número k, el determinante queda multiplicado por dicho número: det (k·L1, L2, L3...) = k · det (L1, L2, L3...)

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix}2.3&2.2&2.5\\-1&3&-2\\3&2&3\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}3&2&5\\-1&3&-2\\3&2&3\end{vmatrix}=2\left[\left(27-12-10\right)-\left(45-12-6\right)\right]=2.(-22)=-44$$

$$\begin{vmatrix}2.3&2.2&2.5\\-1&3&-2\\3&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&4&10\\-1&3&-2\\3&2&3\end{vmatrix}=\left(54-24-20\right)-\left(90-24-12\right)=(10)-(54)=-44$$

- Si permutamos dos líneas paralelas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo con respecto al inicial: det (L1, L2, L3...) = (-1).det (L2, L1, L3...)

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\1&1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3&4&5\\1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}$. Calcular sus determinantes

Solución: Como las matrices A y B tiene dos filas permutadas, sus determinantes deben tener signos contrarios.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&5\\1&1&0\end{vmatrix}=(10+9)-(12+5)=2$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}3&4&5\\1&2&3\\1&1&0\end{vmatrix}=(12+5)-(10+9)=-2$$

- Si una matriz cuadrada tiene una línea con todos los elementos nulos, su determinante vale cero. det (0, L2, L3...) = 0

Ejemplo: Calcular determinante de A, siendo $A=\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&2&2&3\\0&-2&3&-1\\0&1&3&-3\end{pmatrix}$

Solución: Desarrollando por la primera fila, nos queda que

$$\det(A)=\begin{vmatrix}0&1&-1&2\\0&2&2&3\\0&-2&3&-1\\0&1&3&-3\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}2&2&3\\-2&3&-1\\1&3&-3\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}1&-1&2\\-2&3&-1\\1&3&-3\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&2&3\\1&3&-3\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&2&3\\-2&3&-1\end{vmatrix}=0$$

- Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante vale cero. det (L1, L1, L3...) = 0

Ejemplo: Calcular el determinante de la matriz: $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$

Solución: La matriz de la cual nos piden calcular su determinante tiene dos filas iguales, por lo tanto su determinante debe de valer 0. En efecto, aplicando la *"Regla de Sarrous"* tenemos que:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=(2+6+3)-(6+2+3)=0$$

- Si dos líneas paralelas de una matriz cuadrada son proporcionales, su determinante se anula. det (L1, k·L1, L3...) = 0

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&1&1\end{vmatrix}=4+12+6-12-4-6=0$$

- Si una fila (columna) de una matriz cuadrada es combinación lineal de las restantes filas (columnas), su determinante vale cero: det (L1, L2, a· L1 + b· L2, ...) = 0

Ejemplo:

- Si a una línea de una matriz cuadrada se le suma otra paralela, su determinante no varía. det (F1 + F2, F2, F3) = det (F1, F2, F3) + det (F2, F2, F3) = det (F1, F2, F3)

Ejemplo:

- Si a una línea de una matriz cuadrada se le suma otra paralela multiplicada por un número, su determinante no varía. det (L1 + k· L2, L2, L3...) = det (L1, L2, L3...) + det (k·L2, L2, L3...) = det (L1, L2, L3...) + 0

Ejemplo:

<u>Cálculo del rango usando determinantes</u>

Si a un menor M de orden h de la matriz A se le añade la fila p y la columna q de A (que antes no estaban en el menor), obtenemos un menor N de orden h+1 que se dice obtenido de M orlando este menor con la fila p y la columna q.

Ejemplo

El método para el cálculo del rango es un proceso iterado que sigue los siguientes pasos:

Antes de comenzar el método se busca un elemento no nulo, ya que si todos los elementos son 0, el rango será 0. El elemento encontrado será el menor de orden k=1 de partida.

Se orla el menor de orden k hasta encontrar un menor de orden k+1 no nulo. Cuando se encuentra un menor de orden k+1 no nulo se aplica a éste el método.

Si todos los menores orlados obtenidos añadiéndole al menor de partida los elementos de una línea i_0 son nulos, podemos eliminar dicha línea porque es combinación de las que componen el menor de orden k.

Si todos los menores de orden k+1 son nulos el rango es k. (Si aplicamos bien el método en realidad, al llegar a este punto, la matriz tiene orden k).

Ejemplo

<u>Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss</u>

Transformaciones elementales

Son las transformaciones que podemos realizarle a una matriz sin que su rango varíe. Es fácil comprobar que con estas transformaciones el rango no se modifica, usando las propiedades de los determinantes.

- Si se permutan 2 filas ó 2 columnas el rango no varía.
- Si se multiplica o divide una línea por un número no nulo el rango no cambia.
- Si a una línea de una matriz se le suma o resta otra paralela multiplicada por un número no nulo el rango no varía.

De lo anterior, se desprende que se pueden suprimir las filas o columnas que sean nulas y las filas o columnas que sean proporcionales a otras, sin que el rango de la matriz se altere.

Método de Gauss

El método de Gauss consiste en aplicar transformaciones elementales a una matriz con objeto de conseguir que los elementos que están por debajo de la diagonal principal se anulen ($a_{ij} = 0, \ \forall \ i > j$).

Para conseguir "triangularizar" la matriz debemos dejar en la diagonal principal elementos no nulos, salvo que la fila sea nula.

Una vez aplicado este proceso de triangularización, el rango de la matriz es el número de filas no nulas de la matriz obtenida. Esto es fácil probarlo usando las propiedades de los determinantes.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 6 & -3 & 12 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} F_3 - 2F_2 \\ F_4 - F_2/2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el rango de la matriz A es igual a 3, que es el número de filas no nulas

Cálculo de determinantes por el método de Gauss

Se conoce cómo método de Gauss a un método para facilitar el cálculo de determinantes usando las propiedades de éstos. Dicho método consiste en hallar un determinante equivalente (con el mismo valor) al que se pretende calcular, pero triangular. De esta forma el problema se reduce a calcular un determinante de una matriz triangular que es el producto de los elementos de la diagonal.

Para conseguir triangularizar el determinante se pueden aplicar las siguientes operaciones:

- Permutar 2 filas ó 2 columnas.
- Multiplicar o dividir una línea por un número no nulo.
- Sumarle o restarle a una línea otra paralela multiplicada por un número no nulo.

Ejemplos:

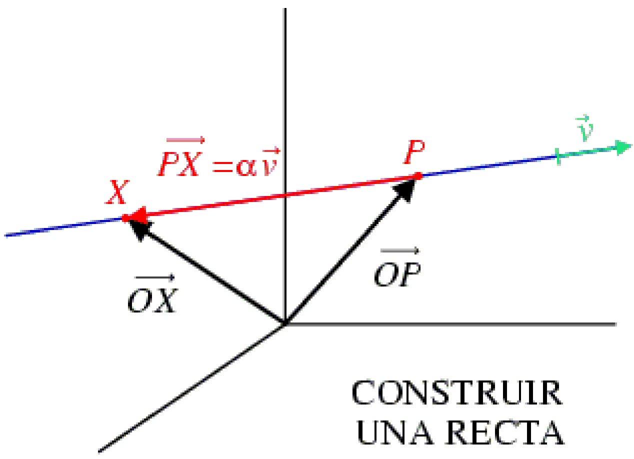
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2-2F_1 \\ = \\ F_3-F_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{F_4-6F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -12 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_3+F_2 \\ = \\ F_4-F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = 13$$

ECUACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO AFÍN TRIDIMENSIONAL

Para definir una recta, sólo necesitamos un punto $P=(x_0,y_0,y_0)$ y un vector $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$. Veamos a continuación cómo hacerlo.

Sea $X=(x,y,z)$ un punto genérico de la recta. Entonces, $\overrightarrow{PX}=\lambda.\vec{v}$, para algún $\lambda\in\mathbb{R}$, luego $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{v}$. Escrito esto usando sus coordenadas, tenemos: $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(v_1,v_2,v_3)$. Esta es la ecuación vectorial de la recta, y a $\vec{v}$ se le llama vector director de dicha recta. Es claro que cualquier vector proporcional a $\vec{v}$ también es un vector director de dicha recta.



Vamos a desarrollar un poco más la ecuación que hemos obtenido:

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(v_1,v_2,v_3)=\left(x_0+\lambda v_1, y_0+\lambda v_2, z_0+\lambda v_3\right)$$

Ahora, como sabemos que dos vectores son iguales si y sólo si lo son componente a componente, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\lambda v_1\\ y&=y_0+\lambda v_2\\ z&=z_0+\lambda v_3\end{aligned}\right\}\text{ Ecuaciones paramétricasde la recta}$$

Ahora, si despejamos λ en cada una de las ecuaciones, e igualamos, se obtiene la que se conoce con el nombre de ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$$

siempre que v_1,v_2,v_3 sean distintos de cero. Cuando esto es así, podemos coger dos igualdades y de ahí obtener una nueva forma de escribir la ecuación de la recta.

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_{10}}{v_2}\rightarrow v_2x-v_1y+(-x_0v_2+y_0v_1)=0\rightarrow Ax+By+D=0$$

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{z-z_0}{v_3}\rightarrow v_3x-v_1z+(-x_0v_3+z_0v_1)=0\rightarrow A'x+B'y+D'=0$$

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

Podemos determinar la posición relativa de dos rectas en el espacio utilizandodos enfoques.

I. En forma vectorial

Sean las rectas r y r' definidas mediante su ecuación vectorial:

$$r:(x,y,z)=\left(x_0,y_0,z_0\right)+\lambda\left(v_1,v_2,v_3\right)$$
$$r':(x,y,z)=\left(x'_0,y'_0,z'_0\right)+\lambda\left(v'_1,v'_2,v'_3\right)$$

Y llamamos: $P=\left(x_0,y_0,z_0\right),Q=\left(x'_0,y'_0,z'_0\right),\vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right),\vec{v'}=\left(v'_1,v'_2,v'_3\right)$ entonces, si:

$$rango\left(\vec{v},\vec{v'}\right)=1\ y\ \begin{cases} rango\left(\vec{v},\vec{v'},\overrightarrow{PQ}\right)=1 \text{ las rectas son coincidentes}\\ rango\left(\vec{v},\vec{v'},\overrightarrow{PQ}\right)=2 \text{ las rectas son paralelas}\end{cases}$$

$$rango\left(\vec{v},\vec{v'}\right)=2\ y\ \begin{cases} rango\left(\vec{v},\vec{v'},\overrightarrow{PQ}\right)=2 \text{ las rectas se cortan}\\ rango\left(\vec{v},\vec{v'},\overrightarrow{PQ}\right)=3 \text{ las rectas se cruzan}\end{cases}$$

II. En forma implícita

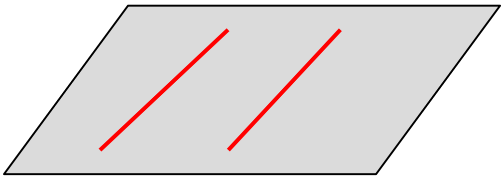
Sean las rectas: $r:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=D_1\\A_2x+B_2y+C_2z=D_2\end{cases}$ y $r':\begin{cases}A_3x+B_3y+C_3z=D_3\\A_4x+B_4y+C_4z=D_4\end{cases}$

Llamaremos A a la matriz del *sistema formado por esas cuatro ecuaciones*, y A' a la ampliada, es decir

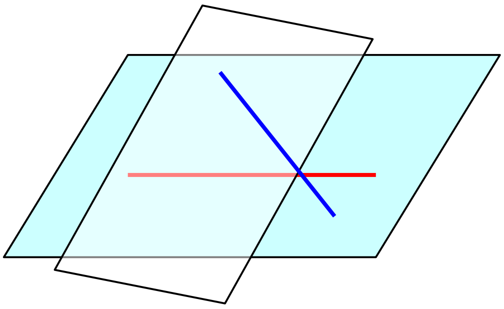
$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

<u>Éstas son las posibilidades:</u>

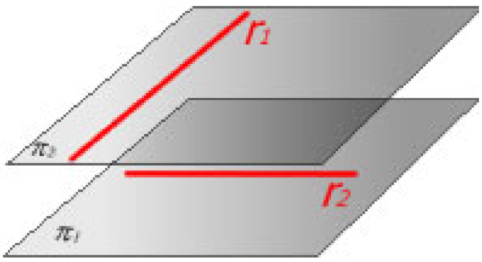
I) rango(A) = 2, rango(A')=2. Entonces, son dos rectas coincidentes.
II) rango(A) = 2, rango(A')=3. Entonces, son dos rectas paralelas, distintas.



III) rango(A) = 3, rango(A')=3. Entonces, son dos rectas secantes; su punto de corte es la solución del sistema.



IV) rango(A')=4, es decir, **Det(A')≠ 0**. Entonces, se dice que las **rectas se cruzan.**



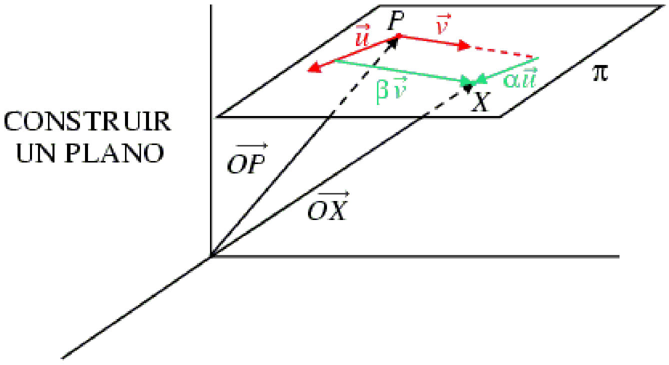
Dos rectas que se cruzan siempre podrán situarse en dos planos paralelos. Además, éste es el único caso en el que no existe un plano que contenga las dos rectas (rectas no coplanarias)

ECUACIONES DEL PLANO

El espacio tridimensional tiene una dirección más que el plano, y eso nos permite incluir un nuevo elemento del que no disponíamos en el plano (salvo tomado en su totalidad): planos. Sean $P=(x_0,y_0,z_0)$ un punto concreto de un cierto plano π, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ los vectores que generan ese plano (son, por tanto, linealmente independientes), y sea

$X=(x\ ,y,z)$ un punto genérico del plano. La forma de obtener la ecuación del plano es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}\\ \overrightarrow{PX}=\lambda\vec{u}+\alpha\vec{v}\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{u}+\alpha\vec{v}$$



Escrito esto usando sus coordenadas, tenemos:

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\alpha(v_1,v_2,v_3)$$

Esta es la ecuación vectorial del plano, y $\vec{u}$, $\vec{v}$ son los vectores que generan el plano. Es claro que cualesquiera vectores proporcionales a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ también generan dicho plano.
Vamos a desarrollar un poco más la ecuación que hemos obtenido:

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\alpha(v_1,v_2,v_3)=$$
$$=\left(x_0,y_0,z_0\right)+(\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_3)+(\alpha v_1,\alpha v_2,\alpha v_3)=$$
$$=\left(x_0+\lambda u_1+\alpha v_1,y_0+\lambda u_2+\alpha v_2,z_0+\lambda u_3+\alpha v_3\right)$$

Ahora, como sabemos que dos vectores son iguales si y sólo si lo son componente a componente, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}x=x_0+\lambda u_1+\alpha v_1\\ y=y_0+\lambda u_2+\alpha v_2\\ z=z_0+\lambda u_3+\alpha v_3\end{array}\right\}\quad \text{Ecuaciones paramétricas del plano}$$

Al contrario que en el caso de las ecuaciones de la recta, aquí no podemos llegar a la ecuación continua del plano, porque no la hay. Sin embargo, sí que podemos llegar a obtener la ecuación implícita del plano:

$$\left(x-x_0,y-y_0,z-z_0\right)=\lambda.\left(u_1,u_2,u_3\right)+\alpha\left(v_1,v_2,v_3\right)$$

Estos tres vectores, pues, son linealmente dependientes, por lo tanto, la matriz que forman es singular, es decir:

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=0$$

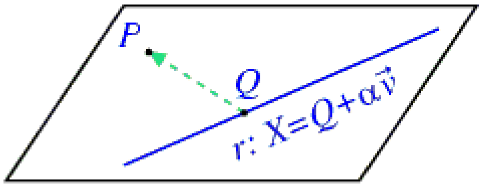
Si desarrollamos este determinante por los elementos de la primera fila, tenemos que:

$$\left(x-x_0\right)\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}-\left(y-y_0\right)\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}+\left(z-z_0\right)\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}$$

de donde, operando, se llega a la *ecuación general del plano*, $Ax+By+Cz+D=0$ siendo

$$A=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad B=-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

PLANO QUE CONTIENE A UN PUNTO P Y A UNA RECTA r



Sea una recta $r:(x,y,z)=\left(x_0,y_0,z_0\right)+\lambda\left(v_1,v_2,v_3\right)$, y sea $P=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ un punto tal que $P\notin r$ La ecuación del plano π que contiene a r y a P es la siguiente:

$$\pi:(x,y,z)=\left(x_1,y_1,z_1\right)+\lambda\left(v_1,v_2,v_3\right)+\mu\left(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\right)$$

POSICIONES DE RECTA Y PLANO:

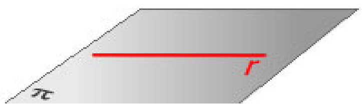
Sea la recta $r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases}$ y el plano $\pi: A_3x+B_3y+C_3z=D_3$

Llamaremos A a la matriz del ***sistema formado por esas tres ecuaciones***, y A’ a la ampliada.

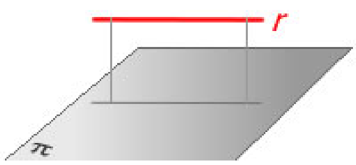
$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A'=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Éstas son las posibilidades:

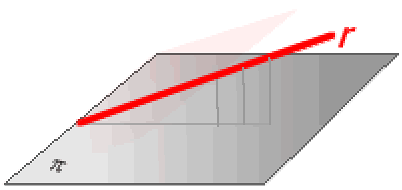
1) rang(A) = 2, rang(A’)=2. Entonces, la recta está contenida en el plano



2) rang(A) = 2, rang(A’)=3. Entonces, la recta es paralela al plano, y no está contenida en él.



3) rang(A) = 3, rang(A’)=3. Entonces, se dice que la recta es secante al plano. El punto de corte es la solución del sistema



Es importante darse cuenta de que el **paralelismo de recta y plano** se da exactamente cuando **Det(A) = 0**.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Al igual que podíamos estudiar las posiciones relativas de dos rectas, podemos estudiar las posiciones relativas de dos planos, para lo que nuevamente lo enfocaremos bajo dos puntos de vista.

I.- En forma vectorial

Sean dos planos π y π' definidos como sigue:

$$\pi: \ (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda+(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3)$$
$$\pi': \ (x,y,z)=(x'_0,y'_0,z'_0)+\lambda(u'_1,u'_2,u'_3)+\mu(v'_1,v'_2,v'_3)$$

Si llamamos $P=(x_0,y_0,z_0)$, $Q=(x'_0,y'_0,z'_0)$, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{u'}=(u'_1,u'_2,u'_3)$, $\vec{v'}=(v'_1,v'_2,v'_3)$ entonces tenemos que, si:

$$\text{rango}\left(\vec{u},\vec{v},\vec{u'},\vec{v'}\right)=2\,y\begin{cases}\text{rango}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=2 \ \text{ Los planos son coincidentes}\\ \text{rango}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=3 \ \text{ Los planos son paralelos}\end{cases}$$

$$rango\left(\vec{u},\vec{v},\vec{u'},\vec{v'}\right)=3 \ \Rightarrow \ \text{Los planos secortan en una recta}$$

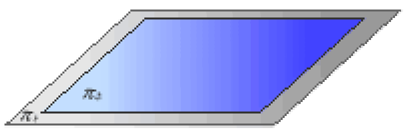
II.- En forma implícita

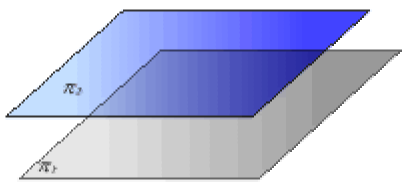
Sean dos planos π y π' definidos como sigue:

$$\pi: \ Ax+By+Cz+D=0$$
$$\pi': A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

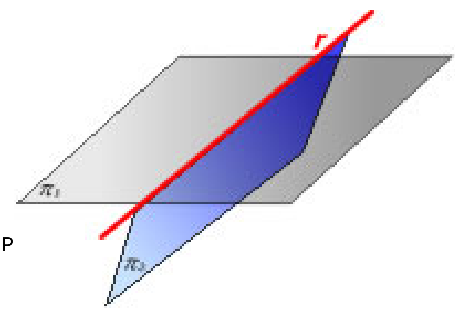
Si llamamos $A=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A_1 & B_1 & C_1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1\end{pmatrix}$, entonces, si:

$$\text{rango}(A)=1\rightarrow \text{ y si}\begin{cases}rango(A')=1 \ \text{ Los planos coinciden}\\ rango(A')=2 \ \text{ Los planos son paralelos}\end{cases}$$





$$rango(A)=2=rango(A')\Rightarrow \text{Los planos se cortan en una recta.}$$



POSICIONES DE 3 PLANOS:

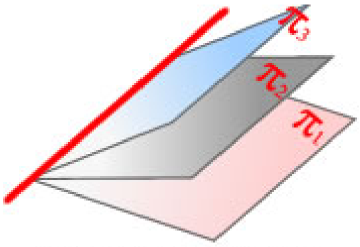
$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \qquad \pi_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

Llamaremos A a la matriz del ***sistema formado por esas tres ecuaciones***, y A' a la ampliada, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Éstas son las posibilidades:

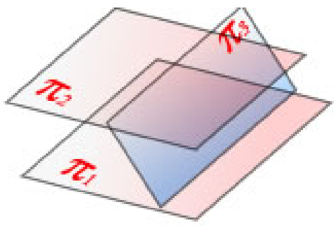
1) rango(A) = 1, rango(A')=1. Entonces, los 3 planos coinciden.
2) rango(A) = 1, rango(A')=2.Entonces, son 3 planos paralelos (Dos de ellos pueden coincidir.)
3) rango(A) = 2, rango(A')=2. Entonces, los 3 planos contienen una misma ; es lo que se llama haz de planos.



Caso 3: Planos de un *haz*

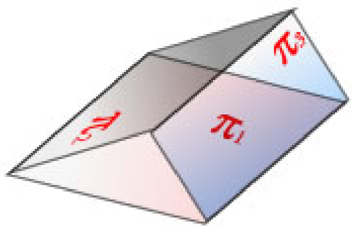
4) rang(A) = 2, rang(A')=3. Entonces, hay dos posibilidades:

4.a) Hay 2 planos paralelos, y el otro los corta (Un menor de orden dos de A es no nulo)



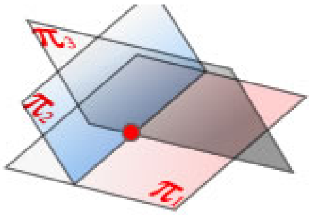
Caso 4a: Dos paralelos y otro no

4.b) Se cortan dos a dos. Los tres son caras de un prisma triangular (Todos los menores de orden dos de A son no nulos).



Caso 4b: Caras *prisma triangular*

5) rang(A) = 3, rang(A')=3. Entonces, los planos tienen exactamente, un punto común (caras de *triedro*)



Caso 5: Tres caras de un triedro

Condición de paralelismo y perpendicularidad

Sean las rectas:

$$r: \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \text{ y } s: \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{x-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3}$$

Y dos planos π y π_1 definidos de forma explicita como sigue:

$\pi: \; Ax + By + Cz + D = 0$

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

Llamemos:

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ que es un vector paralelo a la recta r

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ que es un vector paralelo a la recta s

$\vec{w} = (A, B, C)$ que es un vector perpendicular al plano π

$\vec{t} = (A_1, B_1, C_1)$ que es un vector perpendicular al plano π_1

1º. - La recta r es paralela a s $\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) = \lambda(u_1, u_2, u_3)$ para algún λ

2º. - La recta r es perpendicular a s $\Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{u} = 0$, es decir $v_1u_1 + v_2u_2 + v_2u_2 = 0$

3º. - El plano π es paralelo al $\pi_1 \Leftrightarrow \vec{w} \parallel \vec{t} \Leftrightarrow (A, B, C) = \mu(A_1, B_1, C_1)$

4º. - El plano π es perpendicular al $\pi_1 \Leftrightarrow \vec{w} \perp \vec{t} \Leftrightarrow \vec{w}.\vec{t} = 0 \Leftrightarrow A.A_1 + B.B_1 + C.C_1 = 0$

5º. - La recta r es paralela al plano $\pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{w} = 0$, es decir $v_1A + v_2B + v_3C = 0$

6º. - La recta r es perpendicular al plano $\pi \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w}$ y $(v_1, v_2, v_3) = \gamma(A, B, C)$

APÉNDICE .-

ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

Hay algunas matrices que aparecen frecuentemente y que según su forma, sus elementos, ... reciben nombres diferentes :

Tipo de matriz	Definición	Ejemplo
FILA	**Aquella matriz que tiene una sola fila, siendo su orden** $1 \times n$	$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
COLUMNA	**Aquella matriz que tiene una sola columna, siendo su orden** $m \times 1$	$A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
RECTANGULAR	**Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su orden** $m \times n$ **,** $m \neq n$	$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
TRASPUESTA	**Dada una matriz** A**, se llama traspuesta de** A **a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas.** **Se representa por** A^t ó A^T	Si es $A = (a_{ij})_{m\times n}$ su traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
OPUESTA	**La matriz opuesta de una dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de** A **es** -A.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \; -A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
NULA	**Si todos sus elementos son cero. También se denomina matriz cero y se denota por** $0_{m\times n}$	$0_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
CUADRADA	**Aquella matriz que tiene igual número de filas que de columnas, m = n, diciéndose que la matriz es de orden n.** <u>Diagonal principal</u> **: son los elementos** a_{11} **,** a_{22} **, ...,** a_{nn} <u>Diagonal secundaria</u> **: son los elementos** a_{ij} **con** $i+j = n+1$ <u>Traza</u> de una matriz cuadrada **: es la suma de los elementos de la diagonal principal** tr A.	$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ Diagonal principal : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ Diagonal secundaria : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$
SIMÉTRICA	**Es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta.** $A = A^t$, $a_{ij} = a_{ji}$	$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{9} & \boxed{-6} \\ \boxed{9} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{-6} & \boxed{1} & 5 \end{pmatrix}$
ANTISIMÉTRICA	**Es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta.** $A = -A^t$, $a_{ij} = -a_{ji}$ **Necesariamente** $a_{ii} = 0$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ -9 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

DIAGONAL	**Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal**	$A=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&5&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$
ESCALAR	**Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales**	$A=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{pmatrix}$
IDENTIDAD	**Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a** 1. **Tambien se denomina matriz unidad.**	$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
TRIANGULAR	**Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (o por debajo) de la diagonal principal nulos.**	$A=\begin{pmatrix}1&3&5\\0&4&-1\\0&0&9\end{pmatrix}$ T. superior $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&4&0\\2&8&7\end{pmatrix}$ T. inferior
ORTOGONAL	**Una matriz ortogonal es necesariamente cuadrada e invertible :** $A^{-1} = A^T$ La inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal. El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal. El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1.	$A\cdot A^T=A^T\cdot A=I$ $\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
NORMAL	**Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta. Las matrices simétricas, antisimétricas u ortogonales son necesariamente normales.**	$A=\begin{pmatrix}5&4\\-4&5\end{pmatrix}$ $A\cdot A^T=A^T\cdot A$
INVERSA	**Decimos que una matriz cuadrada** A **tiene inversa,** A^{-1}, **si se verifica que :** $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$	$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}$