

1.— Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Estudiar si es triangularizable por semejanza.
- (b) Hallar sus autovalores y autovectores.

2.— Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Estudiar si A diagonaliza por semejanza.
- (ii) Calcular los autovectores de A .
- (iii) Dar una matriz P inversible y una matriz D diagonal tal que $P^{-1}AP = D$.
- (iv) Calcular $\text{traza}(A^{20})$ y $\det(A^{20})$.

(Examen final, julio 2021)

3.— Sea el endomorfismo de \mathbb{R}^3 ,

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y + 3z, 4y, 3x - y + z)$$

- (i) Hallar la matriz F_C asociada a f respecto de la base canónica.
- (ii) Demostrar que f es diagonalizable.
- (iii) Hallar los autovectores de f .
- (iv) Hallar una base de \mathbb{R}^3 respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.
- (v) ¿Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{traza}(F_C^n) = 3^{2017}$?

(Examen final, enero 2018)

4.— Para cada número real $a \in \mathbb{R}$ se define el endomorfismo de \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, az)$$

- (i) Estudiar en función de los valores de a si el endomorfismo f es diagonalizable y/o triangularizable.
- (ii) Para $a = 0$ calcular una base B respecto a la cual la matriz asociada F_B sea diagonal.
- (iii) Para $a = 1$ calcular $\text{traza}(F_C^{1515})$.

(Examen enero, 2016)

5.— Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

- (i) Hallar sus autovalores y autovectores.
- (ii) Hallar una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP = D$ sea diagonal.
- (iii) Dar una expresión para A^n en función de $n \in \mathbb{N}$.

(Examen enero, 2022)

6.— Dado $a \in \mathbb{R}$ se define el endomorfismo de \mathbb{R}^3 ,

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + az, x + y + z)$$

- (i) Hallar la matriz F_C asociada a f respecto de la base canónica.
- (ii) Estudiar para que valores de a la aplicación es diagonalizable y/o triangularizable.
- (iii) Para $a = -2$ calcular los autovectores de f .
- (iv) Para $a = 1$ hallar una base B en la cual la matriz asociada F_B sea diagonal.
- (v) Para $a = 5$ calcular traza F_C^{11} .

(Examen enero, 2020)

7.— Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & b \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (i) Estudiar en función de los valores a y b si A es diagonalizable o triangularizable por semejanza.
- (ii) Para los valores de a y b para los cuales la matriz diagonaliza por semejanza:
 - (ii.a) Hallar los autovectores de A .
 - (ii.b) Hallar una matriz diagonal D y una matriz P tales que $D = P^{-1}AP$.
 - (ii.c) Hallar $\text{traza}(A^{40})$.

(Examen julio, 2017)

8.— Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -a & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

- (i) Estudiar en función de los valores de a si la matriz A diagonaliza y/o triangulariza por semejanza.
- (ii) Para $a = -1$, hallar una matriz P inversible y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.
- (iii) Calcular a para que $\text{traza}(A^5) = 210$.

(Examen enero, 2023)

9.— Para cada número $k \in \mathbb{R}$ se define la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Estudiar los valores de k para los cuales A es diagonalizable por semejanza.
- (ii) Para $k = 0$:
 - (ii.a) Calcular los autovectores de A .
 - (ii.b) Hallar una matriz inversible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.
- (iii) Hallar k para que $\text{traza}(A^5) = 35$.

(Examen final, julio 2024)

10.— Dado $a \in \mathbb{R}$ se define la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ a & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Estudiar para que valores de a la matriz es diagonalizable por semejanza.
- (ii) Para $a = 0$ calcular los autovectores de A .
- (iii) Para los valores de a para los cuáles es diagonalizable, dar una matriz P inversible y una matriz D diagonal tal que $P^{-1}AP = D$.

(Examen final, enero 2021)

11.— Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a es diagonalizable y/o triangularizable por semejanza. En los casos que sea diagonalizable dar la correspondiente forma diagonal.

(Examen final, enero 2018)

12.— Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorfismo. Si $(1, 2) \in \ker(f)$ y $(0, 1)$ es un autovector asociado a 2, calcular $f(1, 5)$. ¿Es f diagonalizable?.

(Examen final, enero 2021)

13.— De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se sabe:

- i) $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, x - z = 0\}$
- ii) Los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$ son autovectores asociados a un mismo autovalor.
- iii) $\text{traza}(F_C) = 4$.

Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

(Examen enero, 2017)

14.— Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorfismo. Si $(1, 2), (0, 1)$ son autovectores de f asociados respectivamente al 1 y al 2 calcular $f(2, 0)$. ¿Es f un endomorfismo diagonalizable?.

(Examen julio, 2017)

15.— Sea $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ la base canónica de \mathbb{R}^4 y $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del cuál se sabe:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

$$\ker(f) = \mathcal{L}\{\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 - \vec{e}_4\}$$

$$\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \text{ es autovector de } f.$$

Los únicos autovalores de f son 0 y 2.

- (i) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.
- (ii) Hallar los autovalores, sus multiplicades geométricas y sus autovectores asociados.

(Examen enero, 2014)

16.— En \mathbb{R}^3 se consideran dos subespacios vectoriales suplementarios U y V con $\dim(U) = 2$. Sea $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación proyección sobre U paralelamente a V y P_C su matriz respecto de la base canónica.

- (i) ¿Es P_C diagonalizable por semejanza?
- (ii) Calcular los autovalores de P_C , indicando sus multiplicidades algebraicas y geométricas.
- (iii) Sabiendo que $p(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$ hallar las ecuaciones implícitas de V respecto de la base canónica.
- (iv) Sabiendo que $p(1, 2, 3) = (-1, 2, 1)$ hallar $p(-1, 2, 1)$ y la proyección de $(1, 2, 3)$ sobre V paralelamente a U .

(Examen final, junio 2014)

17.— Dar ejemplos de matrices (si existen) en las siguientes condiciones, justificando en cada caso porqué la matriz propuesta cumple lo pedido.

- (i) Una matriz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ que sea triangularizable por semejanza pero no diagonalizable.
- (ii) Una matriz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ que no sea triangularizable por semejanza.
- (iii) Una matriz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ que sea diagonalizable por semejanza pero no triangularizable.

(Examen final, enero 2016)

18.— De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se sabe que:

- (i) $(1, 1), (1, 2)$ son autovectores de f .
- (ii) $f(2, 2) \neq (0, 0)$.
- (iii) $\text{traza}(F_C) = 2$.
- (iv) $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.

Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

(Examen final, enero 2019)

19.— Razona la falsedad o veracidad de las siguiente cuestiones:

- (i) Una matriz $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ con cuatro autovalores reales diferentes siempre es diagonalizable por semejanza.
- (ii) Una matriz cuadrada diagonalizable por semejanza siempre diagonaliza por congruencia.
- (iii) La suma de matrices diagonalizables por semejanza es diagonalizable por semejanza.
- (iv) Si 0 es un autovalor de un endomorfismo f entonces éste no es inyectivo.

(Examen enero, 2015)

I.— Sea A una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Probar que $A^2 - Id = \Omega$.

(Examen final, junio 2007)

II.— En un espacio vectorial E de dimensión n , se consideran dos subespacios vectoriales suplementarios U y V , con $\dim(U) = k$. Se considera el endomorfismo proyección sobre U paralelamente a V :

$$p : E \longrightarrow E$$

- (i) Justificar que p diagonaliza.
- (ii) Hallar el polinomio característico de p , sus autovalores y los correspondientes subespacios característicos de autovectores.

(Examen enero, 2012)

III.— Sea $T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que los elementos de cada una de sus filas suman 2011.

- (i) Probar que 2011 es un autovalor de T .
- (ii) Hallar un vector $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $Tu = 2011u$.
- (iii) Probar que u es también autovector de T^m , para cualquier m natural.
- (iv) Probar que la suma de los elementos de cada una de las filas de T^m es una constante K_m y calcular su valor en función de m .

(Examen junio, 2011)

IV.— Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular sus autovalores y autovectores.
- (b) ¿Es diagonalizable y/o triangularizable por semejanza?
- (c) Calcular, si es posible, una forma de Jordan J y una matriz inversible P tal que $J = P^{-1}AP$.

(Examen extraordinario, diciembre 2009)

V.— Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Hallar la forma de Jordan J de A y una matriz de paso P tal que $J = P^{-1}AP$.
 - (d) Calcular A^{10} .
-

VI.— Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Hallar los autovalores y autovectores de A .
- Calcular una forma de Jordan asociada a A , indicando la correspondiente matriz de paso P .
- Calcular $(A + Id)^{2010}$.

(Examen extraordinario, septiembre 2010)

VII.— Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & a+1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Determinar los valores de a para los cuales la matriz es triangularizable. Indicar cuando es además diagonalizable.
- Para los valores de a para los cuales A es triangularizable pero no diagonalizable, calcular la forma canónica de Jordan J de A y una matriz P tal que $J = P^{-1}AP$.
- Cuando $a = -1$, calcular A^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

(Examen final, junio 2005)

VIII.— Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & -1 & a-1 \\ a & 1 & 0 & -a \\ 1+2a & 0 & 2 & 1-2a \\ -1-a & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real, se pide:

- En función de $a \in \mathbb{R}$, estudiar si A es triangularizable y si es diagonalizable (por semejanza).
- Para $a = 1$, encontrar una forma de Jordan asociada a A y la correspondiente matriz de paso.

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

IX.— Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & a \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Estudiar en función de los valores de a si es triangularizable y/o diagonalizable.
- Cuando sea posible, calcular la correspondiente matriz diagonal o de Jordan en función del parámetro a .
- Para $a = 0$ calcular los autovectores de A . Además hallar una matriz inversible P tal que $J = P^{-1}AP$ siendo J la forma de Jordan.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)

X.— Sea A una matriz cuadrada. Supongamos que $(\lambda - 2)^{12}$ es el polinomio característico de A :

$$m.\text{geométrica}(2) = 6, \quad \text{rango}((A - 2Id)^2) = 2, \quad \dim(\ker((A - 2Id)^3)) = 11.$$

¿Es A triangularizable por semejanza? En caso afirmativo calcular una forma de Jordan semejante a A .

(Primer parcial, enero 2010)

XI.— Encontrar una matriz A que cumpla:

- (1) $\dim(\text{Ker}A) = 1$
- (2) $\lambda = 1$ es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 4.
- (3) $\lambda = 2$ es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 3.
- (4) $\text{rg}(A - I) = 6$, $\text{rg}(A - I)^2 = 4$
- (5) $\text{rg}(A - 2I) = 7$, $\text{rg}(A - 2I)^3 = 5$

(Examen final, septiembre 2003)

XII.— Encontrar una matriz A , 7×7 y de elementos reales, tal que

$$\text{rango}(A) = 4, \quad A^4 = \Omega, \quad A^3 \neq \Omega.$$

(Primer parcial, febrero 2000)

XIII.— Encontrar una matriz real A de dimensión 6 que verifique las condiciones siguientes:

$$\dim \text{Ker}A = 2, \quad \dim \text{Ker}A^2 = 4, \quad \text{rg}(A - I) = 4.$$

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

XIV.— Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por

$$f(x, y, z) = ((\alpha - 1)x + \alpha y + (\alpha - 2)z, x + y + z, x - \alpha y + 2z)$$

- (a) Hallar los valores de α para los que f es un endomorfismo diagonalizable; para esos valores, encontrar una base de vectores característicos.
- (b) Hallar el valor de α para que f tenga un autovalor triple. Encontrar la forma canónica de Jordan y una base asociada.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

XV.— Sea $\mathcal{P}_2(x)$ el espacio vectorial de polinomios en x de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales.

Consideramos la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(x) \longrightarrow \mathcal{P}_2(x); \quad f(p(x)) = p(x) - p'(x)$$

Se pide:

- (a) Probar que es un endomorfismo.
- (b) Escribir la matriz asociada a f con respecto a la base canónica de $\mathcal{P}_2(x)$.
- (c) Calcular sus autovalores y sus autovectores.
- (d) Si f es triangularizable, calcular su forma de Jordan y la base en la que se expresa.
- (e) Describir, si es posible, la aplicación inversa de f .

(Primer parcial, enero 2005)

XVI.— Sea $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Se sabe que A^2 es semejante a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $\text{traza}(A) = 1$.

- a) Hallar los autovalores de A .
- b) ¿Es A diagonalizable por semejanza?

(Examen extraordinario, septiembre 2010)
