ÁLGEBRA LINEAL I **Práctica 7**

Endomorfismos (Curso 2023–2024)

1.– Dada la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Estudiar si es triangularizable por semejanza.

(b) Hallar sus autovalores y autovectores.

2.– Dada la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Estudiar si A diagonaliza por semejanza.

(ii) Calcular los autovectores de A.

(iii) Dar una matriz P inversible y una matriz D diagonal tal que $P^{-1}AP = D$.

(iv) Calcular $traza(A^{20})$ y $det(A^{20})$.

(Examen final, julio 2021)

3.– Sea el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$,
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = (x + y + 3z, 4y, 3x - y + z)$$

(i) Hallar la matriz F_C asociada a f respecto de la base canónica.

(ii) Demostrar que f es diagonalizable.

(iii) Hallar los autovectores de f.

(iv) Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

(v) ¿Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $traza(F_C^n) = 3^{2017}$?

(Examen final, enero 2018)

4.– Para cada número real $a \in \mathbb{R}$ se define el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$:
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, az)$$

(i) Estudiar en función de los valores de a si el endomorfismo f es diagonalizable y/o triangularizable.

(ii) Para $a = 0$ calcular una base B respecto a la cuál la matriz asociada F_B sea diagonal.

(iii) Para $a = 1$ calcular $traza(F_C^{1515})$.

(Examen enero, 2016)

5.– Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

(i) Hallar sus autovalores y autovectores.

(ii) Hallar una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP = D$ sea diagonal.

(iii) Dar una expresión para A^n en función de $n \in \mathbb{N}$.

(Examen enero, 2022)

6.– Dado $a \in \mathbb{R}$ se define el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + az, x + y + z)$$

(i) Hallar la matriz F_C asociada a f respecto de la base canónica.

(ii) Estudiar para que valores de a la aplicación es diagonalizable y/o triangularizable.

(iii) Para $a = -2$ calcular los autovectores de f.

(iv) Para $a = 1$ hallar una base B en la cual la matriz asociada F_B sea diagonal.

(v) Para $a = 5$ calcular traza F_C^{11}.

(Examen enero, 2020)

7.– Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & b \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar en función de los valores a y b si A es diagonalizable o triangularizable por semejanza.

(ii) Para los valores de a y b para los cuales la matriz diagonaliza por semejanza:

(ii.a) Hallar los autovectores de A.

(ii.b) Hallar una matriz diagonal D y una matriz P tales que $D = P^{-1}AP$.

(ii.c) Hallar $traza(A^{40})$.

(Examen julio, 2017)

8.– Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -a & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

(i) Estudiar en función de los valores de a si la matriz A diagonaliza y/o triangulariza por semejanza.

(ii) Para $a = -1$, hallar una matriz P inversible y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

(iii) Calcular a para que $traza(A^5) = 210$.

(Examen enero, 2023)

9.– Para cada número $a \in \mathbb{R}$ se define la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar los valores de a para los cuales A es diagonalizable por semejanza.

(ii) Hallar a para que $traza(A^4) = 19$.

(iii) Para $a = 0$ calcular los autovectores de A. Hallar una matriz inversible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

(Examen final, julio 2018)

10.– Dado $a \in \mathbb{R}$ se define la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ a & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Estudiar para que valores de a la matriz es diagonalizable por semejanza.

(ii) Para $a = 0$ calcular los autovectores de A.

(iii) Para los valores de a para los cuáles es diagonalizable, dar una matriz P inversible y una matriz D diagonal tal que $P^{-1}AP = D$.

(Examen final, enero 2021)

11.– Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a es diagonalizable y/o triangularizable por semejanza. En los casos que sea diagonalizable dar la correspondiente forma diagonal.

(Examen final, enero 2018)

12.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo. Si $(1, 2) \in ker(f)$ y $(0, 1)$ es un autovector asociado a 2, calcular $f(1, 5)$. ¿Es f diagonalizable?.

(Examen final, enero 2021)

13.– De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se sabe:

i) $Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 0,\ x - z = 0\}$

ii) Los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$ son autovectores asociados a un mismo autovalor.

iii) $traza(F_C) = 4$.

Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

(Examen enero, 2017)

14.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorfismo. Si $(1, 2), (0, 1)$ son autovectores de f asociados respectivamente al 1 y al 2 calcular $f(2, 0)$. ¿Es f un endomorfismo diagonalizable?.

(Examen julio, 2017)

15.– Sea $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del cuál se sabe:

$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$
$ker(f) = \mathcal{L}\{\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 - \vec{e}_4\}$
$\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ es autovector de f.
Los únicos autovalores de f son 0 y 2.

(i) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

(ii) Hallar los autovalores, sus multiplicades geométricas y sus autovectores asociados.

(Examen enero, 2014)

16.– En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos subespacios vectoriales suplementarios U y V con $dim(U) = 2$. Sea $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación proyección sobre U paralelamente a V y P_C su matriz respecto de la base canónica.

(i) ¿Es P_C diagonalizable por semejanza?.

(ii) Calcular los autovalores de P_C, indicando sus multiplicidades algebraicas y geométricas.

(iii) Sabiendo que $p(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$ hallar las ecuaciones implícitas de V respecto de la base canónica.

(iv) Sabiendo que $p(1, 2, 3) = (-1, 2, 1)$ hallar $p(-1, 2, 1)$ y la proyección de $(1, 2, 3)$ sobre V paralelamente a U.

(Examen final, junio 2014)

17.– Dar ejemplos de matrices (si existen) en las siguientes condiciones, justificando en cada caso porqué la matriz propuesta cumple lo pedido.

(i) Una matriz $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ que sea triangularizable por semejanza pero no diagonalizable.

(ii) Una matriz $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ que no sea triangularizable por semejanza.

(iii) Una matriz $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ que sea diagonalizable por semejanza pero no triangularizable.

(Examen final, enero 2016)

18.– De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que:

(i) $(1, 1)$, $(1, 2)$ son autovectores de f.

(ii) $f(2, 2) \neq (0, 0)$.

(iii) $traza(F_C) = 2$.

(iv) $dim(Im(f)) = 1$.

Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

(Examen final, enero 2019)

19.– Razona la falsedad o veracidad de las siguiente cuestiones:

(i) Una matriz $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ con cuatro autovalores reales diferentes siempre es diagonalizable por semejanza.

(ii) Una matriz cuadrada diagonalizable por semejanza siempre diagonaliza por congruencia.

(iii) La suma de matrices diagonalizables por semejanza es diagonalizable por semejanza.

(iv) Si 0 es un autovalor de un endomorfismo f entonces éste no es inyectivo.

(Examen enero, 2015)

I.– Sea A una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Probar que $A^2 - Id = \Omega$.

(Examen final, junio 2007)

II.– En un espacio vectorial E de dimensión n, se consideran dos subespacios vectoriales suplementarios U y V, con $dim(U) = k$. Se considera el endomorfismo proyección sobre U paralelamente a V:

$$p : E \longrightarrow E$$

(i) Justificar que p diagonaliza.

(ii) Hallar el polinomio característico de p, sus autovalores y los correspondientes subespacios característicos de autovectores.

(Examen enero, 2012)

III.– Sea $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que los elementos de cada una de sus filas suman 2011.

(i) Probar que 2011 es un autovalor de T.

(ii) Hallar un vector $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $Tu = 2011u$

(iii) Probar que u es también autovector de T^m, para cualquier m natural.

(iv) Probar que la suma de los elementos de cada una de las filas de T^m es una constante K_m y calcular su valor en función de m.

(Examen junio, 2011)

IV.– Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular sus autovalores y autovectores.

(b) ¿Es diagonalizable y/o triangularizable por semejanza?.

(c) Calcular, si es posible, una forma de Jordan J y una matriz inversible P tal que $J = P^{-1}AP$.

(Examen extraordinario, diciembre 2009)

V.– Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Hallar la forma de Jordan J de A y una matriz de paso P tal que $J = P^{-1}AP$.

(d) Calcular A^{10}.

(Primer parcial, enero 2006)

VI.– Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar los autovalores y autovectores de A.

b) Calcular una forma de Jordan asociada a A, indicando la correspondiente matriz de paso P.

c) Calcular $(A + Id)^{2010}$.

(Examen extraordinario, septiembre 2010)

VII.– Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & a+1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinar los valores de a para las cuales la matriz es triangularizable. Indicar cuando es además diagonalizable.

(b) Para los valores de a para los cuales A es triangularizable pero no diagonalizable, calcular la forma canónica de Jordan J de A y una matriz P tal que $J = P^{-1}AP$.

(c) Cuando $a = -1$, calcular A^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

(Examen final, junio 2005)

VIII.– Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & -1 & a-1 \\ a & 1 & 0 & -a \\ 1+2a & 0 & 2 & 1-2a \\ -1-a & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real, se pide:

a) En función de $a \in \mathbb{R}$, estudiar si A es triangularizable y si es diagonalizable (por semejanza).

b) Para $a = 1$, encontrar una forma de Jordan asociada a A y la correspondiente matriz de paso.

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

IX.– Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & a \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar en función de los valores de a si es triangularizable y/o diagonalizable.

b) Cuando sea posible, calcular la correspondiente matriz diagonal o de Jordan en función del parámetro a.

c) Para $a = 0$ calcular los autovectores de A. Además hallar una matriz inversible P tal que $J = P^{-1}AP$ siendo J la forma de Jordan.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)

X.– Sea A una matriz cuadrada. Supongamos que $(\lambda-2)^{12}$ es el polinomio característico de A:

$$\text{m.geométrica}(2)=6, \quad rango((A-2Id)^2)=2, \quad dim(ker((A-2Id)^3)=11.$$

¿Es A triangularizable por semejanza? En caso afirmativo calcular una forma de Jordan semejante a A.

(Primer parcial, enero 2010)

XI.– Encontrar una matriz A que cumpla:

(1) $\dim(\text{Ker}A)=1$

(2) $\lambda=1$ es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 4.

(3) $\lambda=2$ es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 3.

(4) $\text{rg}(A-I)=6$, $\text{rg}(A-I)^2=4$

(5) $\text{rg}(A-2I)=7$, $\text{rg}(A-2I)^3=5$

(Examen final, septiembre 2003)

XII.– Encontrar una matriz A, 7×7 y de elementos reales, tal que

$$\text{rango}(A)=4, \quad A^4=\Omega, \quad A^3\neq\Omega.$$

(Primer parcial, febrero 2000)

XIII.– Encontrar una matriz real A de dimensión 6 que verifique las condiciones siguientes:

$$\dim\ \text{Ker}A=2, \quad \dim\ \text{Ker}A^2=4, \quad \text{rg}(A-I)=4.$$

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

XIV.– Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por

$$f(x,y,z)=((\alpha-1)x+\alpha y+(\alpha-2)z,\ x+y+z,\ x-\alpha y+2z)$$

(a) Hallar los valores de α para los que f es un endomorfismo diagonalizable; para esos valores, encontrar una base de vectores característicos.

(b) Hallar el valor de α para que f tenga un autovalor triple. Encontrar la forma canónica de Jordan y una base asociada.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

XV.– Sea $\mathcal{P}_2(x)$ el espacio vectorial de polinomios en x de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales.

Consideramos la aplicación:

$$f:\mathcal{P}_2(x)\longrightarrow\mathcal{P}_2(x); \qquad f(p(x))=p(x)-p'(x)$$

Se pide:

(a) Probar que es un endomorfismo.

(b) Escribir la matriz asociada a f con respecto a la base canónica de $\mathcal{P}_2(x)$.

(c) Calcular sus autovalores y sus autovectores.

(d) Si f es triangularizable, calcular su forma de Jordan y la base en la que se expresa.

(e) Describir, si es posible, la aplicación inversa de f.

(Primer parcial, enero 2005)

XVI.– Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Se sabe que A^2 es semejante a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $traza(A) = 1$.

a) Hallar los autovalores de A.

b) ¿Es A diagonalizable por semejanza?.

(Examen extraordinario, septiembre 2010)