ÁLGEBRA LINEAL I — Práctica 7

Endomorfismos — (Curso 2020–2021)

1.– Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Estudiar si es triangularizable por semejanza.

(b) Hallar sus autovalores y autovectores.

2.– Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Probar que A es una matriz triangularizable.

(c) Calcular los subespacios de autovectores de A.

(Primer parcial, enero 2006)

3.– Sea el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (x + y + 3z, 4y, 3x - y + z)$$

(i) Hallar la matriz F_C asociada a f respecto de la base canónica.

(ii) Demostrar que f es diagonalizable.

(iii) Hallar los autovectores de f.

(iv) Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

(v) ¿Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $traza(F_C^n) = 3^{2017}$?

(Examen final, enero 2018)

4.– Para cada número real $a \in \mathbb{R}$ se define el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, az)$$

(i) Estudiar en función de los valores de a si el endomorfismo f es diagonalizable y/o triangularizable.

(ii) Para $a = 0$ calcular una base B respecto a la cuál la matriz asociada F_B sea diagonal.

(iii) Para $a = 1$ calcular $traza(F_C^{1515})$.

(Examen enero, 2016)

5.– Dado $a \in \mathbb{R}$ se define el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + az, x + y + z)$$

(i) Hallar la matriz F_C asociada a f respecto de la base canónica.

(ii) Estudiar para que valores de a la aplicación es diagonalizable y/o triangularizable.

(iii) Para $a = -2$ calcular los autovectores de f.

(iv) Para $a = 1$ hallar una base B en la cual la matriz asociada F_B sea diagonal.

(v) Para $a = 5$ calcular traza F_C^{11}.

(Examen enero, 2020)

6.– Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & b \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar en función de los valores a y b si A es diagonalizable o triangularizable por semejanza.

(ii) Para los valores de a y b para los cuales la matriz diagonaliza por semejanza:

(ii.a) Hallar los autovectores de A.

(ii.b) Hallar una matriz diagonal D y una matriz P tales que $D = P^{-1}AP$.

(ii.c) Hallar $traza(A^{40})$.

(Examen julio, 2017)

7.– Dados los números $a, b \in \mathbb{R}$ se define la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar en función de a y b si diagonaliza y/o triangulariza por semejanza. En los casos en los que diagonaliza escribir una matriz diagonal semejante a A.

(ii) Para $a = 2$ y $b = -1$ calcular A^{2017}.

(iii) Para $a = 0$ y $b = 1$ calcular sus autovectores.

(Examen enero, 2017)

8.– Para cada número $a \in \mathbb{R}$ se define la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar los valores de a para los cuales A es diagonalizable por semejanza.

(ii) Hallar a para que $traza(A^4) = 19$.

(iii) Para $a = 0$:

(a) Calcular los autovectores de A.

(b) Hallar una matriz inversible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

(Examen final, julio 2018)

9.– Para cada $a \in \mathbb{R}$ se define a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & a \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar en función dos valores de a cando diagonaliza e/ou triangularizar por semellanza.

(ii) Para $a = 0$ calcular unha matriz P e unha matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$. Para cada natural n atopar $traza(A^n)$.

(iii) Para $a = 1$ atopar unha forma de Jordan J semellante a A.

(iv) Para $a = 2$ se A é a matriz asociada a un endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ respecto da base canónica calcular $f(1, 0, 2, 1)$.

(Examen enero, 2015)

10.– Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a es diagonalizable y/o triangularizable por semejanza. En los casos que sea diagonalizable dar la correspondiente forma diagonal.

(Examen final, enero 2018)

11.– Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo diagonalizable. Si $ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z = 0\}$, $(1, 1, -1)$ es un autovector de f y la traza de la matriz asociada a f en una base B es 2, hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

(Examen julio, 2016)

12.– De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se sabe:

i) $Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 0,\ x - z = 0\}$

ii) Los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$ son autovectores asociados a un mismo autovalor.

iii) $traza(F_C) = 4$.

Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

(Examen enero, 2017)

13.– Sea $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del cuál se sabe:

$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$
$ker(f) = \mathcal{L}\{\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 - \vec{e}_4\}$
$\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ es autovector de f.
Los únicos autovalores de f son 0 y 2.

(i) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

(ii) Hallar los autovalores, sus multiplicades geométricas y sus autovectores asociados.

(Examen enero, 2014)

14.– En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos subespacios vectoriales suplementarios U y V con $dim(U) = 2$. Sea $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación proyección sobre U paralelamente a V y P_C su matriz respecto de la base canónica.

(i) ¿Es P_C diagonalizable por semejanza?.

(ii) Calcular los autovalores de P_C, indicando sus multiplicidades algebraicas y geométricas.

(iii) Sabiendo que $p(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$ hallar las ecuaciones implícitas de V respecto de la base canónica.

(iv) Sabiendo que $p(1, 2, 3) = (-1, 2, 1)$ hallar $p(-1, 2, 1)$ y la proyección de $(1, 2, 3)$ sobre V paralelamente a U.

(Examen final, junio 2014)

15.– Dar ejemplos de matrices (si existen) en las siguientes condiciones, justificando en cada caso porqué la matriz propuesta cumple lo pedido.

(i) Una matriz $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ que sea triangularizable por semejanza pero no diagonalizable.

(ii) Una matriz $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ que no sea triangularizable por semejanza.

(iii) Una matriz $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ que sea diagonalizable por semejanza pero no triangularizable.

(Examen final, enero 2016)

16.– De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que:

(i) $(1, 1)$, $(1, 2)$ son autovectores de f.

(ii) $f(2, 2) \neq (0, 0)$.

(iii) $traza(F_C) = 2$.

(iv) $dim(Im(f)) = 1$.

Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

(Examen final, enero 2019)

17.– Razoa a falsedade ou veracidade das seguintes afirmacións:

(i) Unha matriz $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ con catro autovalores reais diferentes sempre é diagonalizable por semellanza.

(ii) Unha matriz cadrada diagonalizable por semellanza sempre é diagonalizable por congruencia.

(iii) A suma de matrices diagonalizables por semellanza é diagonalizable por semellanza.

(iv) Se 0 é un autovalor dun endomorfismo f entón éste non é inxectivo.

(Examen enero, 2015)

18.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorfismo. Si $(1, 2), (0, 1)$ son autovectores de f asociados respectivamente al 1 y al 2 calcular $f(2, 0)$. ¿Es f un endormofismo diagonalizable?.

(Examen julio, 2017)

I.– Sea A una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Probar que $A^2 - Id = \Omega$.

(Examen final, junio 2007)

II.– En un espacio vectorial E de dimensión n, se consideran dos subespacios vectoriales suplementarios U y V, con $dim(U) = k$. Se considera el endomorfismo proyección sobre U paralelamente a V:

$$p : E \longrightarrow E$$

(i) Justificar que p diagonaliza.

(ii) Hallar el polinomio característico de p, sus autovalores y los correspondientes subespacios característicos de autovectores.

(Examen enero, 2012)

III.– Sea $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que los elementos de cada una de sus filas suman 2011.

(i) Probar que 2011 es un autovalor de T.

(ii) Hallar un vector $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $Tu = 2011u$

(iii) Probar que u es también autovector de T^m, para cualquier m natural.

(iv) Probar que la suma de los elementos de cada una de las filas de T^m es una constante K_m y calcular su valor en función de m.

(Examen junio, 2011)

IV.– Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular sus autovalores y autovectores.

(b) ¿Es diagonalizable y/o triangularizable por semejanza?.

(c) Calcular, si es posible, una forma de Jordan J y una matriz inversible P tal que $J = P^{-1}AP$.

(Examen extraordinario, diciembre 2009)

V.– Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Hallar la forma de Jordan J de A y una matriz de paso P tal que $J = P^{-1}AP$.

(d) Calcular A^{10}.

(Primer parcial, enero 2006)

VI.– Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar los autovalores y autovectores de A.

b) Calcular una forma de Jordan asociada a A, indicando la correspondiente matriz de paso P.

c) Calcular $(A + Id)^{2010}$.

(Examen extraordinario, septiembre 2010)

VII.– Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & a+1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinar los valores de a para las cuales la matriz es triangularizable. Indicar cuando es además diagonalizable.

(b) Para los valores de a para los cuales A es triangularizable pero no diagonalizable, calcular la forma canónica de Jordan J de A y una matriz P tal que $J = P^{-1}AP$.

(c) Cuando $a = -1$, calcular A^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

(Examen final, junio 2005)

VIII.– Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & -1 & a-1 \\ a & 1 & 0 & -a \\ 1+2a & 0 & 2 & 1-2a \\ -1-a & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real, se pide:

a) En función de $a \in \mathbb{R}$, estudiar si A es triangularizable y si es diagonalizable (por semejanza).

b) Para $a = 1$, encontrar una forma de Jordan asociada a A y la correspondiente matriz de paso.

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

IX.– Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & a \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar en función de los valores de a si es triangularizable y/o diagonalizable.

b) Cuando sea posible, calcular la correspondiente matriz diagonal o de Jordan en función del parámetro a.

c) Para $a = 0$ calcular los autovectores de A. Además hallar una matriz inversible P tal que $J = P^{-1}AP$ siendo J la forma de Jordan.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)

X.– Sea A una matriz cuadrada. Supongamos que $(\lambda-2)^{12}$ es el polinomio característico de A:

$$\text{m.geométrica}(2)=6, \quad rango((A-2Id)^2)=2, \quad dim(ker((A-2Id)^3)=11.$$

¿Es A triangularizable por semejanza? En caso afirmativo calcular una forma de Jordan semejante a A.

(Primer parcial, enero 2010)

XI.– Encontrar una matriz A que cumpla:

(1) $\dim(\text{Ker}A)=1$

(2) $\lambda=1$ es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 4.

(3) $\lambda=2$ es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 3.

(4) $\text{rg}(A-I)=6$, $\text{rg}(A-I)^2=4$

(5) $\text{rg}(A-2I)=7$, $\text{rg}(A-2I)^3=5$

(Examen final, septiembre 2003)

XII.– Encontrar una matriz A, 7×7 y de elementos reales, tal que

$$\text{rango}(A)=4, \quad A^4=\Omega, \quad A^3\neq\Omega.$$

(Primer parcial, febrero 2000)

XIII.– Encontrar una matriz real A de dimensión 6 que verifique las condiciones siguientes:

$$\dim \text{Ker}A=2, \quad \dim \text{Ker}A^2=4, \quad \text{rg}(A-I)=4.$$

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

XIV.– Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por

$$f(x,y,z)=((\alpha-1)x+\alpha y+(\alpha-2)z,\ x+y+z,\ x-\alpha y+2z)$$

(a) Hallar los valores de α para los que f es un endomorfismo diagonalizable; para esos valores, encontrar una base de vectores característicos.

(b) Hallar el valor de α para que f tenga un autovalor triple. Encontrar la forma canónica de Jordan y una base asociada.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

XV.– Sea $\mathcal{P}_2(x)$ el espacio vectorial de polinomios en x de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales.

Consideramos la aplicación:

$$f:\mathcal{P}_2(x)\longrightarrow\mathcal{P}_2(x); \qquad f(p(x))=p(x)-p'(x)$$

Se pide:

(a) Probar que es un endomorfismo.

(b) Escribir la matriz asociada a f con respecto a la base canónica de $\mathcal{P}_2(x)$.

(c) Calcular sus autovalores y sus autovectores.

(d) Si f es triangularizable, calcular su forma de Jordan y la base en la que se expresa.

(e) Describir, si es posible, la aplicación inversa de f.

(Primer parcial, enero 2005)

XVI.– Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Se sabe que A^2 es semejante a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $traza(A) = 1$.

a) Hallar los autovalores de A.

b) ¿Es A diagonalizable por semejanza?.

(Examen extraordinario, septiembre 2010)