

1.— Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Estudiar si es triangularizable por semejanza.
- (b) Hallar sus autovalores y autovectores.

2.— Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Probar que  $A$  es una matriz triangularizable.
- (c) Calcular los subespacios de autovectores de  $A$ .

(Primer parcial, enero 2006)

3.— Sea el endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y + 3z, 4y, 3x - y + z)$$

- (i) Hallar la matriz  $F_C$  asociada a  $f$  respecto de la base canónica.
- (ii) Demostrar que  $f$  es diagonalizable.
- (iii) Hallar los autovectores de  $f$ .
- (iv) Hallar una base de  $\mathbb{R}^3$  respecto de la cual la matriz asociada a  $f$  sea diagonal.
- (v) ¿Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{traza}(F_C^n) = 3^{2017}$ ?

(Examen final, enero 2018)

4.— Para cada número real  $a \in \mathbb{R}$  se define el endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$ :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, az)$$

- (i) Estudiar en función de los valores de  $a$  si el endomorfismo  $f$  es diagonalizable y/o triangularizable.
- (ii) Para  $a = 0$  calcular una base  $B$  respecto a la cual la matriz asociada  $F_B$  sea diagonal.
- (iii) Para  $a = 1$  calcular  $\text{traza}(F_C^{1515})$ .

(Examen enero, 2016)

---

5.— Para cada  $a \in \mathbb{R}$  definimos la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (y + (a - 1)z, (1 - a)x + ay + z, x - y + 2z)$$

- a) Hallar la matriz  $F_C$  asociada a  $f$  respecto de la base canónica.
- b) Estudiar para que valores de  $a$  el endomorfismo es diagonalizable.
- c) Para aquellos valores de  $a$  para los que el endomorfismo  $f$  es diagonalizable:
  - c1) Hallar una base de  $\mathbb{R}^3$  en la cuál la matriz asociada a  $f$  es diagonal.
  - c2) Calcular  $F_C^{2011}$ .

(Examen enero, 2011)

---

6.— Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & b \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (i) Estudiar en función de los valores  $a$  y  $b$  si  $A$  es diagonalizable o triangularizable por semejanza.
- (ii) Para los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales la matriz diagonaliza por semejanza:
  - (ii.a) Hallar los autovectores de  $A$ .
  - (ii.b) Hallar una matriz diagonal  $D$  y una matriz  $P$  tales que  $D = P^{-1}AP$ .
  - (ii.c) Hallar  $\text{traza}(A^{40})$ .

(Examen julio, 2017)

---

7.— Dados los números  $a, b \in \mathbb{R}$  se define la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Estudiar en función de  $a$  y  $b$  si diagonaliza y/o triangulariza por semejanza. En los casos en los que diagonaliza escribir una matriz diagonal semejante a  $A$ .
- (ii) Para  $a = 2$  y  $b = -1$  calcular  $A^{2017}$ .
- (iii) Para  $a = 0$  y  $b = 1$  calcular sus autovectores.

(Examen enero, 2017)

---

8.— Para cada número  $a \in \mathbb{R}$  se define la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Estudiar los valores de  $a$  para los cuales  $A$  es diagonalizable por semejanza.
- (ii) Hallar  $a$  para que  $\text{traza}(A^4) = 19$ .
- (iii) Para  $a = 0$ :
  - (a) Calcular los autovectores de  $A$ .
  - (b) Hallar una matriz inversible  $P$  y una matriz diagonal  $D$  tal que  $P^{-1}AP = D$ .

(Examen final, julio 2018)

---

9.— Para cada  $a \in \mathbb{R}$  se define a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & a \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Estudiar en función dos valores de  $a$  cando diagonaliza e/ou triangularizar por semellanza.
- (ii) Para  $a = 0$  calcular unha matriz  $P$  e unha matriz diagonal  $D$  tal que  $P^{-1}AP = D$ . Para cada natural  $n$  atopar  $\text{traza}(A^n)$ .
- (iii) Para  $a = 1$  atopar unha forma de Jordan  $J$  semellante a  $A$ .
- (iv) Para  $a = 2$  se  $A$  é a matriz asociada a un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^4$  respecto da base canónica calcular  $f(1, 0, 2, 1)$ .

(Examen enero, 2015)

---

10.— Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$  estudiar para que valores de  $a$  es diagonalizable y/o triangularizable por semejanza. En los casos que sea diagonalizable dar la correspondiente forma diagonal.

(Examen final, enero 2018)

---

11.— Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un endomorfismo diagonalizable. Si  $\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ ,  $(1, 1, -1)$  es un autovector de  $f$  y la traza de la matriz asociada a  $f$  en una base  $B$  es 2, hallar la matriz asociada a  $f$  respecto de la base canónica.

(Examen julio, 2016)

---

12.— De una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se sabe:

- i)  $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, x - z = 0\}$
- ii) Los vectores  $(1, 1, 0)$  y  $(1, 0, 0)$  son autovectores asociados a un mismo autovalor.
- iii)  $\text{traza}(F_C) = 4$ .

Hallar la matriz asociada a  $f$  respecto de la base canónica.

(Examen enero, 2017)

---

13.— Sea  $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^4$  y  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo del cuál se sabe:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

$$\ker(f) = \mathcal{L}\{\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 - \vec{e}_4\}$$

$$\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \text{ es autovector de } f.$$

Los únicos autovalores de  $f$  son 0 y 2.

- (i) Hallar la matriz asociada a  $f$  respecto de la base canónica.
- (ii) Hallar los autovalores, sus multiplicades geométricas y sus autovectores asociados.

(Examen enero, 2014)

---

**14.**— En  $\mathbb{R}^3$  se consideran dos subespacios vectoriales suplementarios  $U$  y  $V$  con  $\dim(U) = 2$ . Sea  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación proyección sobre  $U$  paralelamente a  $V$  y  $P_C$  su matriz respecto de la base canónica.

- (i) ¿Es  $P_C$  diagonalizable por semejanza?
- (ii) Calcular los autovalores de  $P_C$ , indicando sus multiplicidades algebraicas y geométricas.
- (iii) Sabiendo que  $p(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$  hallar las ecuaciones implícitas de  $V$  respecto de la base canónica.
- (iv) Sabiendo que  $p(1, 2, 3) = (-1, 2, 1)$  hallar  $p(-1, 2, 1)$  y la proyección de  $(1, 2, 3)$  sobre  $V$  paralelamente a  $U$ .

**(Examen final, junio 2014)**

---

**15.**— Dar ejemplos de matrices (si existen) en las siguientes condiciones, justificando en cada caso porqué la matriz propuesta cumple lo pedido.

- (i) Una matriz  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  que sea triangularizable por semejanza pero no diagonalizable.
- (ii) Una matriz  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  que no sea triangularizable por semejanza.
- (iii) Una matriz  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  que sea diagonalizable por semejanza pero no triangularizable.

**(Examen final, enero 2016)**

---

**16.**— De una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se sabe que:

- (i)  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  son autovectores de  $f$ .
- (ii)  $f(2, 2) \neq (0, 0)$ .
- (iii)  $\text{traza}(F_C) = 2$ .
- (iv)  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ .

Hallar la matriz asociada a  $f$  respecto de la base canónica.

**(Examen final, enero 2019)**

---

**17.**— Razona a falsedade ou veracidade das seguintes afirmacións:

- (i) Unha matriz  $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  con catro autovalores reais diferentes sempre é diagonalizable por semellanza.
- (ii) Unha matriz cadrada diagonalizable por semellanza sempre é diagonalizable por congruencia.
- (iii) A suma de matrices diagonalizables por semellanza é diagonalizable por semellanza.
- (iv) Se 0 é un autovalor dun endomorfismo  $f$  entón éste non é inxectivo.

**(Examen enero, 2015)**

---

**18.**— Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un endomorfismo. Si  $(1, 2)$ ,  $(0, 1)$  son autovectores de  $f$  asociados respectivamente al 1 y al 2 calcular  $f(2, 0)$ . ¿Es  $f$  un endomorfismo diagonalizable?

**(Examen julio, 2017)**

---

**I.**— Sea  $A$  una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es  $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ . Probar que  $A^2 - Id = \Omega$ .

(Examen final, junio 2007)

---

**II.**— En un espacio vectorial  $E$  de dimensión  $n$ , se consideran dos subespacios vectoriales suplementarios  $U$  y  $V$ , con  $\dim(U) = k$ . Se considera el endomorfismo proyección sobre  $U$  paralelamente a  $V$ :

$$p : E \longrightarrow E$$

- (i) Justificar que  $p$  diagonaliza.
- (ii) Hallar el polinomio característico de  $p$ , sus autovalores y los correspondientes subespacios característicos de autovectores.

(Examen enero, 2012)

---

**III.**— Sea  $T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriz tal que los elementos de cada una de sus filas suman 2011.

- (i) Probar que 2011 es un autovalor de  $T$ .
- (ii) Hallar un vector  $u \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Tu = 2011u$
- (iii) Probar que  $u$  es también autovector de  $T^m$ , para cualquier  $m$  natural.
- (iv) Probar que la suma de los elementos de cada una de las filas de  $T^m$  es una constante  $K_m$  y calcular su valor en función de  $m$ .

(Examen junio, 2011)

---

**IV.**— Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular sus autovalores y autovectores.
- (b) ¿Es diagonalizable y/o triangularizable por semejanza?
- (c) Calcular, si es posible, una forma de Jordan  $J$  y una matriz inversible  $P$  tal que  $J = P^{-1}AP$ .

(Examen extraordinario, diciembre 2009)

---

**V.**— Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Hallar la forma de Jordan  $J$  de  $A$  y una matriz de paso  $P$  tal que  $J = P^{-1}AP$ .
- (d) Calcular  $A^{10}$ .

(Primer parcial, enero 2006)

---

**VI.**— Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Hallar los autovalores y autovectores de  $A$ .
- Calcular una forma de Jordan asociada a  $A$ , indicando la correspondiente matriz de paso  $P$ .
- Calcular  $(A + Id)^{2010}$ .

(Examen extraordinario, septiembre 2010)

---

**VII.**— Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & a+1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Determinar los valores de  $a$  para los cuales la matriz es triangularizable. Indicar cuando es además diagonalizable.
- Para los valores de  $a$  para los cuales  $A$  es triangularizable pero no diagonalizable, calcular la forma canónica de Jordan  $J$  de  $A$  y una matriz  $P$  tal que  $J = P^{-1}AP$ .
- Cuando  $a = -1$ , calcular  $A^n$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .

(Examen final, junio 2005)

---

**VIII.**— Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & -1 & a-1 \\ a & 1 & 0 & -a \\ 1+2a & 0 & 2 & 1-2a \\ -1-a & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

donde  $a$  es un parámetro real, se pide:

- En función de  $a \in \mathbb{R}$ , estudiar si  $A$  es triangularizable y si es diagonalizable (por semejanza).
- Para  $a = 1$ , encontrar una forma de Jordan asociada a  $A$  y la correspondiente matriz de paso.

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

---

**IX.**— Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & a \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Estudiar en función de los valores de  $a$  si es triangularizable y/o diagonalizable.
- Cuando sea posible, calcular la correspondiente matriz diagonal o de Jordan en función del parámetro  $a$ .
- Para  $a = 0$  calcular los autovectores de  $A$ . Además hallar una matriz inversible  $P$  tal que  $J = P^{-1}AP$  siendo  $J$  la forma de Jordan.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)

---

**X.**— Sea  $A$  una matriz cuadrada. Supongamos que  $(\lambda - 2)^{12}$  es el polinomio característico de  $A$ :

$$m.\text{geométrica}(2) = 6, \quad \text{rango}((A - 2Id)^2) = 2, \quad \dim(\ker((A - 2Id)^3)) = 11.$$

¿Es  $A$  triangularizable por semejanza? En caso afirmativo calcular una forma de Jordan semejante a  $A$ .

**(Primer parcial, enero 2010)**

---

**XI.**— Encontrar una matriz  $A$  que cumpla:

- (1)  $\dim(\text{Ker}A) = 1$
- (2)  $\lambda = 1$  es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 4.
- (3)  $\lambda = 2$  es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 3.
- (4)  $\text{rg}(A - I) = 6, \text{rg}(A - I)^2 = 4$
- (5)  $\text{rg}(A - 2I) = 7, \text{rg}(A - 2I)^3 = 5$

**(Examen final, septiembre 2003)**

---

**XII.**— Encontrar una matriz  $A$ ,  $7 \times 7$  y de elementos reales, tal que

$$\text{rango}(A) = 4, \quad A^4 = \Omega, \quad A^3 \neq \Omega.$$

**(Primer parcial, febrero 2000)**

---

**XIII.**— Encontrar una matriz real  $A$  de dimensión 6 que verifique las condiciones siguientes:

$$\dim \text{Ker}A = 2, \quad \dim \text{Ker}A^2 = 4, \quad \text{rg}(A - I) = 4.$$

**(Examen extraordinario, septiembre 1999)**

---

**XIV.**— Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo dado por

$$f(x, y, z) = ((\alpha - 1)x + \alpha y + (\alpha - 2)z, x + y + z, x - \alpha y + 2z)$$

- (a) Hallar los valores de  $\alpha$  para los que  $f$  es un endomorfismo diagonalizable; para esos valores, encontrar una base de vectores característicos.
- (b) Hallar el valor de  $\alpha$  para que  $f$  tenga un autovalor triple. Encontrar la forma canónica de Jordan y una base asociada.

**(Examen extraordinario, septiembre 2004)**

---

**XV.**— Sea  $\mathcal{P}_2(x)$  el espacio vectorial de polinomios en  $x$  de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales.

Consideramos la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(x) \longrightarrow \mathcal{P}_2(x); \quad f(p(x)) = p(x) - p'(x)$$

Se pide:

- (a) Probar que es un endomorfismo.
- (b) Escribir la matriz asociada a  $f$  con respecto a la base canónica de  $\mathcal{P}_2(x)$ .
- (c) Calcular sus autovalores y sus autovectores.
- (d) Si  $f$  es triangularizable, calcular su forma de Jordan y la base en la que se expresa.
- (e) Describir, si es posible, la aplicación inversa de  $f$ .

**(Primer parcial, enero 2005)**

---

**XVI.**— Sea  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Se sabe que  $A^2$  es semejante a  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  y  $\text{traza}(A) = 1$ .

- a) Hallar los autovalores de  $A$ .
- b) ¿Es  $A$  diagonalizable por semejanza?

**(Examen extraordinario, septiembre 2010)**

---