

1.— De las siguientes aplicaciones definidas entre espacios vectoriales reales, determinar cuáles son homomorfismos, monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos. Obtener también, con respecto a bases que se definirán, la expresión matricial, base y ecuaciones del núcleo y la imagen de todos los homomorfismos.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 2$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(x, y) = (x, y, x + y)$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = (xy, x - 2y)$

(d) $u : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \quad u(p(x)) = p'(x)$

(e) $v : \mathcal{M}_{2 \times 3} \rightarrow \mathcal{S}_3, \quad v \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} a + b & a - b & c \\ a - b & d & e + f \\ c & e + f & e - f \end{array} \right)$

2.— Sea la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x - y, x + y + z)$$

- (i) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 .
- (ii) Probar que $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ y $B' = \{(1, -1), (1, 0)\}$ son bases respectivamente de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 .
- (iii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $\ker(f)$ respecto de la base B .
- (iv) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' .

(Examen final, julio 2024)

3.— Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales y $S_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices cuadradas simétricas 2×2 . Se define:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow S_2(\mathbb{R}), \quad f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}$$

- (i) Probar que f es una aplicación lineal.
- (ii) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.
- (iii) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases $B = \{1, (x - 1), (x - 2)^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $S_2(\mathbb{R})$.

(Examen final, julio 2016)

4.— En \mathbb{R}^3 se consideran los subespacios que tienen las siguientes ecuaciones implícitas en la base canónica:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Determinar la matriz de la proyección sobre el primero paralelamente al segundo, y viceversa.

5.— Dada la aplicación:

$$f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad f(A) = A - A^t$$

- (i) Probar que f es lineal.
- (ii) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.
- (iii) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (iv) Hallar las ecuaciones paramétricas de $\ker(f)$ e implícitas de $\text{Im}(f)$ respecto de la base B .
- (v) Dar un conjunto de matrices que sea una base de $\ker(f)$.

(Examen final, junio 2014)

6.— Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Se considera la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \quad f(p(x)) = x \cdot p'(x)$$

- (i) Demostrar que f es una aplicación lineal.
- (ii) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica $C = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (iii) Probar que los vectores $B = \{1, x - 1, (x - 1)^2\}$ forman una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (iv) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base B .
- (v) Calcular las ecuaciones paramétricas de $\text{Im}(f)$ en la base canónica y las ecuaciones implícitas del núcleo en la base B .

(Examen final, enero 2021)

7.— De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se sabe que:

- $f(1, 1, 1) = Id$.
- $\ker(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(Examen final, enero 2024)

8.— Dada la aplicación:

$$f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(A) = (\text{traza}(A), \text{traza}(A + A^t))$$

- (i) Probar que f es lineal.
- (ii) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y \mathbb{R}^2 .
- (iii) Usando la matriz asociada calculada en el apartado anterior, hallar $f(\text{Id})$.
- (iv) Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de $\ker(f)$ respecto de la base canónica de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (v) Demostrar que los siguientes vectores forman una base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (vi) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ y $B' = \{(0, 1), (1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 .

(Examen final, enero 2022)

9.— Calcular la matriz asociada en la base canónica de un endomorfismo f de \mathbb{R}^4 que verifique:
 $f \circ f = 0$, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, $(1, 0, 0, 2) \in \text{Im}(f)$, $(0, 1, 1, 0) \in \ker(f)$.

(Examen final, julio 2015)

10.— Dadas las aplicaciones lineales:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^2, & f(p(x)) &= (p(1), p(-1)) \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & g(x, y) &= (x + y, x - y, 2x - 3y) \end{aligned}$$

hallar la matriz asociada a $h = g \circ f$ respecto de las base canónicas. Calcular $h((x + 1)^2)$.

(Examen final, julio 2019)

11.— En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{x^2\}.$$

- (i) Probar que son subespacios suplementarios.
- (ii) Respecto a la base $C = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ calcular la matriz asociada a la proyección sobre U paralelamente a V .
- (iii) Calcular el polinomio que es proyección de $2 - x + 3x^2$ sobre U paralelamente a V .

(Examen final, enero 2017)

12.— En el espacio de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2 se consideran los subespacios:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}, \quad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid p'(x) = 0\}$$

- (i) Probar que U y V son suplementarios.
- (ii) Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección sobre U paralelamente a V .
- (iii) Hallar un polinomio $p(x)$ sabiendo que su proyección sobre U paralelamente a V es $(x-1)^2$ y que $p(0) = 0$.

(Examen final, julio 2015)

13.— En \mathbb{R}^3 se sabe que la aplicación proyección sobre un subespacio U paralelamente a otro V es:

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) = (-y + z, y, z)$$

- (i) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U y V respecto de la base canónica.
- (ii) Hallar la proyección del vector $\vec{w} = (2, 3, 1)$ sobre V paralelamente a U .

(Examen final, enero 2019)

14.— Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) En un espacio vectorial de dimensión 10, un conjunto de 11 vectores siempre es un sistema generador.
- (ii) Una aplicación lineal lleva vectores linealmente dependientes en vectores linealmente dependientes.
- (iii) Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ puede ser inyectiva.
- (iv) Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ siempre es sobreyectiva.

(Examen final, julio 2016)

15.— De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se sabe que $f(1, 2) = (1, 1)$ y $(0, 1) \in \ker(f)$. Calcular $f(6, 5)$.

(Examen final, julio 2024)

16.— Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x + y)$. ¿Puede ser f la aplicación proyección sobre un subespacio paralelamente a otro?. Razona la respuesta.

(Examen final, julio 2023)

I.— Sea f una aplicación lineal del espacio vectorial real S_2 de las matrices simétricas de dimensión 2, en el espacio vectorial real $M_{2 \times 2}$ de las matrices cuadradas de dimensión 2, siendo:

$$f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (a) Matriz de f , indicando las bases en las que está definida.
- (b) Ecuaciones paramétricas de la imagen de f , en la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- (c) Ecuaciones cartesianas del núcleo de f , en la base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- (d) Encontrar un subespacio de S_2 y otro de $M_{2 \times 2}$, ambos de dimensión 2, entre los que la restricción de f a ellos sea biyectiva.

(Primer parcial, enero de 2002)

II.— Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3. Sean U y W dos subespacios suplementarios de V de dimensiones 2 y 1 respectivamente. Llamamos $f : V \rightarrow V$ a la aplicación proyección sobre U paralelamente a W . Sea B una base de V .

Probar que la matriz asociada a f respecto a la base B cumple:

$$F_{BB}^n = F_{BB} \text{ para cualquier } n \geq 1.$$

(Primer parcial, enero 2006)

III.— Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales de grados menor o igual que 2; sean:

$$p(x) = 1 + x + x^2; \quad q(x) = 1 + 2x^2; \quad r(x) = x + x^2,$$

y sean

$$u = (2, 0, 1); \quad v = (3, 1, 0); \quad w = (1, -2, 3).$$

Considérese la aplicación lineal $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(p(x)) = u; \quad f(q(x)) = v; \quad f(r(x)) = w.$$

- (a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas de V y \mathbb{R}^3 .
- (b) Hallar una base B de V y otra base C de \mathbb{R}^3 tales que respecto de ellas, la matriz de f sea la identidad I_3 .

(Examen extraordinario, diciembre 2005)

IV.— Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal dada por:

$$f(a, b, c, d) = (a + b)x^2 + bx + (c - d)$$

a) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' , con:

$$B = \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1)\}, \quad B' = \{1 + x + x^2, 1 + x, 1\}.$$

b) Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de $\text{Ker}(f)$ respecto de la base canónica.

(Primer parcial, junio 2010)

V.— Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos. Consideramos las aplicaciones lineales:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & f(x, y, z) &= (x + y, y + z, x + z) \\ g : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^3, & g(ax^2 + bx + c) &= (a - b, c + a - b, 2b - a) \end{aligned}$$

y las bases de \mathbb{R}^3 y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $C = \{1, x, x^2\}$.

Hallar la matriz asociada a la aplicación $f \circ g$ respecto de las bases C y B .

(Examen final, junio 2009)

VI.— Sea el espacio vectorial V de las funciones reales de una variable, definidas sobre \mathbb{R} , con las operaciones habituales de suma de funciones y producto por un escalar. Si ϕ es la aplicación que hace corresponder a cada terna de números reales (a, b, c) la función $f_{(a,b,c)}$ definida por:

$$f_{(a,b,c)}(x) = a \sin^2 x + b \cos^2 x + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se pide:

- Probar que ϕ es una aplicación lineal de \mathbb{R}^3 en V .
- Hallar una base de la imagen y otra del núcleo, analizando si ϕ es inyectiva o sobreyectiva.
- Comprobar que el conjunto U formado por las funciones constantes es un subespacio vectorial de V . Hallar su dimensión y una base.
- Hallar el conjunto origen de U , si es un subespacio vectorial dar una base.

(Primer parcial, febrero 1999)

VII.— Sean $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ aplicaciones lineales no nulas tales que $g \circ f$ es idénticamente cero y $\dim \text{Im} g = 3$. Calcular $\dim \text{Ker} f$.

(Examen final, septiembre 2007)

VIII.— Sea la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + z & 2y + z \\ x + z & x - 2y \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (ii) Hallar las ecuaciones paramétricas de $\ker(f)$ respecto de la base canónica.
- (iii) Probar que $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$.
- (iv) Si $B = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ hallar la matriz asociada a F respecto de las bases B y B' .

(Examen final, enero 2018)

IX.—

- (a) Decidir si existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$\ker f = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^1 - x^3 = x^2 = 0\},$$

$$\operatorname{Im} f = \{(y^1, y^2, y^3, y^4) \in \mathbb{R}^4 : y^1 - y^2 = y^2 - y^3 = 0\}.$$

Si existe, dar la matriz (con respecto a las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4) de una que verifique estas condiciones. Si no existe, demostrarlo.

- (b) Idem para

$$\ker f = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : 2x^1 - x^2 + x^3 = 0\},$$

$$\operatorname{Im} f = \{(y^1, y^2, y^3, y^4) \in \mathbb{R}^4 : y^1 + 2y^2 = y^1 - y^3 = 0\}.$$

(Primer parcial, febrero 2001)

X.— Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Decidir razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $f \circ f = id$ entonces $f = id$.
- (b) Si $f \circ f = 0$ entonces $f = 0$.
- (c) Si $f \circ f = 0$ entonces 0 es autovalor de f .
- (d) $\operatorname{Ker}(f - Id) \subset \operatorname{Im}(f)$.

(Examen final, julio 2012)
