# ÁLGEBRA LINEAL I — Práctica 6

## Aplicaciones Lineales — (Curso 2019–2020)

**1.–** De las siguientes aplicaciones definidas entre espacios vectoriales reales, determinar cuáles son homomorfismos, monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos. Obtener también, con respecto a bases que se definirán, la expresión matricial, base y ecuaciones del núcleo y la imagen de todos los homomorfismos.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 2$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x, y) = (x,\ y,\ x + y)$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = (xy,\ x - 2y)$

(d) $u : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \quad u(p(x)) = p'(x)$

(e) $v : \mathcal{M}_{2\times 3} \to \mathcal{S}_3, \quad v\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b & c \\ a-b & d & e+f \\ c & e+f & e-f \end{pmatrix}$

---

**2.–** Sea la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y, z) = (x + y + z, x - y)$$

(i) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

(ii) Probar que $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $B' = \{(1, 2), (1, 0)\}$ son bases respectivamente de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

(iii) Hallar las ecuaciones implícitas de $ker(f)$ respecto de la base $B$.

(iv) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de las bases $B$ y $B'$.

**(Examen final, julio 2018)**

---

**3.–** Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales y $S_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices cuadradas simétricas $2 \times 2$. Se define:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R}), \qquad f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}$$

(i) Probar que $f$ es una aplicación lineal.

(ii) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de las bases canónicas.

(iii) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de las bases $B = \{1, (x - 1), (x - 2)^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $S_2(\mathbb{R})$.

**(Examen final, julio 2016)**

---

**4.–** En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios que tienen las siguientes ecuaciones implícitas en la base canónica:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2x_2 \\ x_2 & = & -x_3 \end{array} \right.$$

Determinar la matriz de la proyección sobre el primero paralelamente al segundo, y viceversa.

---

**5.–** Dada la aplicación:

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad f(A) = A - A^t$$

(i) Probar que $f$ es lineal.

(ii) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de la base canónica.

(iii) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de la base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(iv) Hallar las ecuaciones paramétricas de $ker(f)$ e implícitas de $Im(f)$ respecto de la base $B$.

(v) Dar un conjunto de matrices que sea una base de $ker(f)$.

**(Examen final, junio 2014)**

---

**6.–** Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Consideramos la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(p(x)) = (p'(-1), p'(0), p'(1))$$

(i) Probar que $f$ es lineal.

(ii) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de las bases canónicas.

(iii) Hallar las ecuaciones paramétricas de la imagen y el núcleo de $f$.

**(Examen final, julio 2017)**

---

**7.–** Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. De una aplicación lineal $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se sabe que:

$$f((x+1)^2) = (1,0), \qquad x+1 \in ker(f), \quad f(x^2) = (0,1)$$

Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de las bases canónicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$. Calcular $f((x-1)^2)$.

**(Examen final, enero 2016)**

---

**8.–** Se define la aplicación:

$$f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(A) = (traza(A), traza(AB)), \qquad \text{con } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Probar que es una aplicación lineal.

(ii) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de las bases canónicas de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$.

(iii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $ker(f)$ respecto de la base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(iv) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de las bases $B$ y $B'$ con:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad B' = \{(0,1),(1,1)\}.$$

**(Examen final, enero 2015)**

---

**9.–** Calcular la matriz asociada en la base canónica de un endomorfismo $f$ de $\mathbb{R}^4$ que verifique: $f \circ f = 0$, $dim(Im(f)) = 2$, $(1,0,0,2) \in Im(f)$, $(0,1,1,0) \in ker(f)$.

**(Examen final, julio 2015)**

---

**10.–** Dadas las aplicaciones lineales:

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \qquad f(p(x)) = (p(1), p(-1)) \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad g(x,y) = (x+y, x-y, 2x-3y) \end{aligned}$$

hallar la matriz asociada a $h = g \circ f$ respecto de las base canónicas. Calcular $h((x+1)^2)$.

**(Examen final, julio 2019)**

---

**11.–** En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{x^2\}.$$

(i) Probar que son subespacios suplementarios.

(ii) Respecto a la base $C = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ calcular la matriz asociada a la proyección sobre $U$ paralelamente a $V$.

(iii) Calcular el polinomio que es proyección de $2 - x + 3x^2$ sobre $U$ paralelamente a $V$.

**(Examen final, enero 2017)**

---

**12.–** En el espacio de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2 se consideran los subespacios:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \qquad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p'(x) = 0\}$$

(i) Probar que $U$ y $V$ son suplementarios.

(ii) Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección sobre $U$ paralelamente a $V$.

(iii) Hallar un polinomio $p(x)$ sabiendo que su proyección sobre $U$ paralelamente a $V$ es $(x-1)^2$ y que $p(0) = 0$.

**(Examen final, julio 2015)**

---

**13.–** En $\mathbb{R}^3$ se sabe que la aplicación proyección sobre un subespacio $U$ paralelamente a otro $V$ es:

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad p(x, y, z) = (-y + z, y, z)$$

(i) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U$ y $V$ respecto de la base canónica.

(ii) Hallar la proyección del vector $\vec{w} = (2, 3, 1)$ sobre $V$ paralelamente a $U$.

**(Examen final, enero 2019)**

---

**14.–** Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) En un espacio vectorial de dimensión 10, un conjunto de 11 vectores siempre es un sistema generador.

(ii) Una aplicación lineal lleva vectores linealmente dependientes en vectores linealmente dependientes.

(iii) Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ puede ser inyectiva.

(iv) Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ siempre es sobreyectiva.

**(Examen final, julio 2016)**

---

**15.–** De un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que $Im(f) = ker(f)$ y $f(1, 0) = (1, 1)$. Hallar $f(2, 3)$.

**(Examen final, julio 2019)**

---

**I.–** Sea $f$ una aplicación lineal del espacio vectorial real $S_2$ de las matrices simétricas de dimensión 2, en el espacio vectorial real $M_{2\times 2}$ de las matrices cuadradas de dimensión 2, siendo:

$$f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Matriz de $f$, indicando las bases en las que está definida.

(b) Ecuaciones paramétricas de la imagen de $f$, en la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Ecuaciones cartesianas del núcleo de $f$, en la base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) Encontrar un subespacio de $S_2$ y otro de $M_{2\times 2}$, ambos de dimensión 2, entre los que la restricción de $f$ a ellos sea biyectiva.

**(Primer parcial, enero de 2002)**

---

**II.–** Sea $V$ un espacio vectorial real de dimensión 3. Sean $U$ y $W$ dos subespacios suplementarios de $V$ de dimensiones 2 y 1 respectivamente. Llamamos $f : V \to V$ a la aplicación proyección sobre $U$ paralelamente a $W$. Sea $B$ una base de $V$.

Probar que la matriz asociada a $f$ respecto a la base $B$ cumple:

$$F_{BB}{}^n = F_{BB} \text{ para cualquier } n \geq 1.$$

**(Primer parcial, enero 2006)**

---

**III.–** Sea $V$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grados menor o igual que 2; sean:

$$p(x) = 1 + x + x^2; \; q(x) = 1 + 2x^2; \; r(x) = x + x^2,$$

y sean

$$u = (2, 0, 1); \; v = (3, 1, 0); \; w = (1, -2, 3).$$

Considérese la aplicación lineal $f : V \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(p(x)) = u; \; f(q(x)) = v; \; f(r(x)) = w.$$

(a) Hallar la matriz de $f$ respecto de las bases canónicas de $V$ y $\mathbb{R}^3$.

(b) Hallar una base $B$ de $V$ y otra base $C$ de $\mathbb{R}^3$ tales que respecto de ellas, la matriz de $f$ sea la identidad $I_3$.

**(Examen extraordinario, diciembre 2005)**

---

**IV.–** Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal dada por:

$$f(a,b,c,d) = (a+b)x^2 + bx + (c-d)$$

a) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de las bases $B$ y $B'$, con:

$$B = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,-1)\}, \quad B' = \{1+x+x^2, 1+x, 1\}.$$

b) Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de $Ker(f)$ respecto de la base canónica.

**(Primer parcial, junio 2010)**

---

**V.–** Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos. Consideramos las aplicaciones lineales:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$$
$$g : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(ax^2+bx+c) = (a-b, c+a-b, 2b-a)$$

y las bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $C = \{1, x, x^2\}$.

Hallar la matriz asociada a la aplicación $f \circ g$ respecto de las bases $C$ y $B$.

**(Examen final, junio 2009)**

---

**VI.–** Sea el espacio vectorial $V$ de las funciones reales de una variable, definidas sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones habituales de suma de funciones y producto por un escalar. Si $\phi$ es la aplicación que hace corresponder a cada terna de números reales $(a,b,c)$ la función $f_{(a,b,c)}$ definida por:

$$f_{(a,b,c)}(x) = a\mathrm{sen}^2 x + b\cos^2 x + c, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se pide:

a) Probar que $\phi$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $V$.

b) Hallar una base de la imagen y otra del núcleo, analizando si $\phi$ es inyectiva o sobreyectiva.

c) Comprobar que el conjunto $U$ formado por las funciones constantes es un subespacio vectorial de $V$. Hallar su dimensión y una base.

d) Hallar el conjunto origen de $U$, si es un subespacio vectorial dar una base.

**(Primer parcial, febrero 1999)**

---

**VII.–** Sean $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ aplicaciones lineales no nulas tales que $g \circ f$ es idénticamente cero y $\dim \mathrm{Im} g = 3$. Calcular $\dim \mathrm{Ker} f$.

**(Examen final, septiembre 2007)**

---

**VIII.–** Sea la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z & 2y+z \\ x+z & x-2y \end{pmatrix}$$

(i) Hallar la matriz asociada a $f$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Hallar las ecuaciones paramétricas de $ker(f)$ respecto de la base canónica.

(iii) Probar que $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

(iv) Si $B = \{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,0)\}$ hallar la matriz asociada a $F$ respecto de las bases $B$ y $B'$.

**(Examen final, enero 2018)**

---

**IX.–**

(a) Decidir si existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^1 - x^3 = x^2 = 0\}, \\ \operatorname{Im} f &= \{(y^1,y^2,y^3,y^4) \in \mathbb{R}^4 : y^1 - y^2 = y^2 - y^3 = 0\}. \end{aligned}$$

Si existe, dar la matriz (con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$) de una que verifique estas condiciones. Si no existe, demostrarlo.

(b) Idem para

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3 : 2x^1 - x^2 + x^3 = 0\}, \\ \operatorname{Im} f &= \{(y^1,y^2,y^3,y^4) \in \mathbb{R}^4 : y^1 + 2y^2 = y^1 - y^3 = 0\}. \end{aligned}$$

**(Primer parcial, febrero 2001)**

---

**X.–** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Decidir razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f \circ f = id$ entonces $f = id$.

(b) Si $f \circ f = 0$ entonces $f = 0$.

(c) Si $f \circ f = 0$ entonces $0$ es autovalor de $f$.

(d) $Ker(f - Id) \subset Im(f)$.

**(Examen final, julio 2012)**

---