

1.– En el espacio vectorial real  $\mathbb{R}^2$  consideramos los siguientes subconjuntos:

(a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .

(b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3y\}$ .

(c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

(d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y; e y \geq 0\}$ .

(e)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 0\}$ .

- Representarlos gráficamente.

- Basándose en su representación gráfica deducir cuales son subespacios vectoriales y cuáles no. Probarlo.

---

2.– En el espacio vectorial  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  se consideran los conjuntos de matrices:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{traza}(A) = 0\}$$

$$V = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Probar que  $B$  es una base de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

(ii) Calcular las ecuaciones paramétrica e implícitas de  $V$  respecto de la base  $B$ .

(iii) Calcular las ecuaciones implícitas de  $U \cap V$  respecto de la base  $B$ .

**(Examen final, julio 2017)**

---

3.– En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$  se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0, x + y - z + t = 0, z - t = 0\}$$

$$V = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 1), (1, 0, 2, 2), (1, 0, 0, 0)\}$$

(i) Calcular  $\dim(U)$ ,  $\dim(V)$ ,  $\dim(U + V)$  y  $\dim(U \cap V)$ .

(ii) Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $U \cap V$  respecto de la base canónica.

(iii) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $V$  en la base:

$$B = \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1)\}.$$

(iv) Hallar las ecuaciones implícitas de un subespacio  $W$  de manera que  $V$  y  $W$  sean suplementarios.

**(Examen final, enero 2023)**

---

4.— En el espacio vectorial  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  de polinomios de grado menor o igual que 3 se consideran los subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(1) = 1\}, \quad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(1) = 0, p'(1) = 0\}$$

- (i) Estudiar si  $U$  y  $V$  son subespacios vectoriales.
- (ii) Demostrar que el conjunto  $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$  es una base de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ .
- (iii) Hallar las ecuaciones implícitas de  $V$  en la base  $B$ .

**(Examen final, enero 2018)**

---

5.— En el espacio vectorial  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Se consideran los conjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \quad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) \cdot p(0) = 0\}, \quad W = \mathcal{L}\{1+x^2, 1-x\}$$

- (i) Decidir razonadamente cuáles de los subconjuntos anteriores son subespacios vectoriales de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .
- (ii) Hallar las ecuaciones implícitas de  $U$  y  $W$  respecto de la base canónica.
- (iii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de  $U \cap W$  respecto de la base canónica.
- (iv) Demostrar que  $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$  es una base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .
- (v) Hallar las ecuaciones implícitas de  $U \cap W$  respecto de la base  $B$ .

**(Examen final, enero 2019)**

---

6.— En el espacio vectorial real  $\mathbb{R}^3$  consideramos las siguientes bases:

- la base canónica  $C = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .

- la base  $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\} = \{(0, 1, 1), (2, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ .

- la base  $B'' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \{(1, -1, 0), (0, 0, -1), (1, 1, 1)\}$ .

- (a) Si  $(1, 3, 2)$  es un vector de  $\mathbb{R}^3$  calcular sus coordenadas en cada una de las bases anteriores.
- (b) Denotamos por  $(y_1, y_2, y_3)$  las coordenadas de un vector en la base  $B'$ . Consideramos el subespacio vectorial dado por la ecuación:

$$y_1 + 2y_2 - y_3 = 0$$

Calcular las ecuaciones paramétricas y cartesianas de este subespacio con respecto a cada una de las bases dadas.

---

7.— En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  se considera el conjunto de vectores:

$$B = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$$

- (i) Demostrar que  $B$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (ii) Si  $x' + y' + z' = 0$  es la ecuación implícita en la base  $B$  de un subespacio  $U$ , hallar sus ecuaciones paramétricas en la base canónica.
- (iii) Si  $x + y + z = 0$  es la ecuación implícita en la base canónica de otro subespacio  $V$ , hallar las ecuaciones paramétricas de  $U \cap V$  en la base  $B$ .

**(Examen final, enero 2022)**

---

8.— En el espacio vectorial de matrices  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  se consideran los subconjuntos:

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad V = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{traza}(A) = 0, A = A^t\}.$$

- (i) Probar que  $V$  es un subespacio vectorial de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .
- (ii) Demostrar que  $U$  y  $V$  son subespacios suplementarios.
- (iii) Hallar la proyección de  $Id$  sobre  $U$  paralelamente a  $V$ .

**(Examen final, enero 2014)**

---

9.— En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (2, 0, 1), (0, 0, 1)\}, \quad V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 2, 3)\}$$

- (i) Hallar las ecuaciones implícitas de  $U$  y  $V$  respecto de la base canónica.
- (ii) Probar razonadamente que los vectores de  $B = \{(0, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 3, 1)\}$  forman una base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (iii) Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de  $U \cap V$  respecto de la base  $B$ .
- (iv) ¿Son  $U$  y  $V$  suplementarios?
- (v) Dar las ecuaciones paramétricas respecto de la base canónica de un subespacio vectorial suplementario a  $V$ .

**(Examen, diciembre 2014)**

---

10.— En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$  y dado un número real  $a$  se consideran los subespacios:

$$U = \mathcal{L}\{(1, a, 0, 1), (2, 2, a, 0), (1, 1, 0, a)\}, \quad V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, x - z = 0\}.$$

- (i) Hallar la dimensión de  $U$ ,  $V$ ,  $U + V$  y  $U \cap V$  en función de  $a$ .
- (ii) Para  $a = 1$  hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $U \cap V$ .
- (iii) Para  $a = 0$  probar que los subespacios  $U$  y  $V$  son suplementarios y calcular la proyección de  $(1, 2, 1, 1)$  sobre  $U$  paralelamente a  $V$ .

**(Examen final, julio 2016)**

---

11.— En el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 4,  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$  se consideran los subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p(-1) + p'(0) = 0\}$$
$$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p''(0) = 0\}$$

- (i) Probar que son subespacios vectoriales.
- (ii) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $U$ ,  $V$ ,  $U + V$ ,  $U \cap V$  con respecto a la base canónica.
- (iii) ¿Son espacios suplementarios?

**Notación:**  $p'(x)$ ,  $p''(x)$  denotan respectivamente la primera y segunda derivada del polinomio.

---

12.— En  $\mathbb{R}^4$  consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\{(b, b, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

$$V = \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 1), (0, a, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

- (a) Calcular la dimensión de  $U \cap V$  en función de  $a$  y  $b$ .  
(c) Para  $a = 1$  y  $b = 0$  escribir las ecuaciones implícitas de  $U \cap V$  respecto de la base canónica.

**(Examen final, junio 2008)**

---

13.— En el espacio vectorial  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  se consideran los conjuntos:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{rango}(A) < 2\}, \quad V = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{traza} \left( A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$$

$$W = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- (i) Decidir razonadamente cuáles de los subconjuntos anteriores son subespacios vectoriales de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .  
(ii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de  $V$  respecto de la base canónica.  
(iii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de  $V \cap W$  respecto de la base canónica.  
(iv) Demostrar que  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  es una base de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .  
(v) Hallar las ecuaciones implícitas de  $V$  respecto de la base  $B$ .

**(Examen final, julio 2019)**

---

14.— Sea  $V$  un espacio vectorial real y  $U_1, U_2, U_3$  subespacios vectoriales. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones probando aquellas que sean ciertas y descartando con un contraejemplo las falsas.

- (a)  $(U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3) \subset U_1 + (U_2 \cap U_3)$ .  
(b)  $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$ .

**(Primer parcial, enero 2009)**

---

15.— En el espacio vectorial  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  de polinomios de grado menor o igual que 2 se consideran los subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid p'(1) = p(0)\}, \quad V = \mathcal{L}\{1 + x^2\}$$

- (i) Probar que  $U$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .  
(ii) Demostrar que  $U$  y  $V$  son suplementarios.  
(iii) Calcular el polinomio que es proyección de  $q(x) = (x - 1)^2$  sobre  $V$  paralelamente a  $U$ .

**(Examen final, enero 2022)**

---

**16.**— Sea  $V$  un espacio vectorial que tiene un sistema generador formado por 2018 vectores. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i)  $V$  tiene un sistema de 2018 vectores linealmente independientes.
- (ii)  $\dim(V) \geq 2018$ .
- (iii)  $\dim(V) \leq 2018$ .
- (iv) Cualquier subconjunto de  $V$  formado por 2019 vectores es un sistema de vectores linealmente dependientes.

**(Examen final, julio 2018)**

---

**I.**— En el espacio vectorial  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$V = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}.$$

- (i) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $U$  y  $U + V$  respecto de la base canónica.
- (ii) ¿Son  $U$  y  $V$  subespacios suplementarios?
- (iii) Probar que los vectores:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

son una base de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

- (iv) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $U$  en la base  $B$ .

**(Examen final, enero 2016)**

---

**II.**— Sea  $V$  un espacio vectorial cualquiera. Dados tres subespacios vectoriales  $A, B, C$ , estudiar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

- $(A + B) \cap C \neq (A \cap C) + (B \cap C)$ .
- $(A + B) \cap C \subset (A \cap C) + (B \cap C)$ .
- $(A + B) \cap C \supset (A \cap C) + (B \cap C)$ .
- $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$ .

**(Primer parcial, enero 2007)**

---

**III.**— Sea el espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ ,  $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$ . Consideramos el subespacio:

$$W = \mathcal{L} \left\{ \sin^2(x/2), \cos(x), \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), 2 \right\}$$

- (i) Probar que los vectores de  $B = \{\sin(x), \cos(x), 1\}$  son un sistema libre.
  - (ii) Probar que  $B$  es una base de  $W$ .
  - (iii) Fijado  $a \in \mathbb{R}$ , probar que  $\sin(x + a) \in W$ .
  - (iv) Escribir las coordenadas de  $\sin(x + a)$  respecto de la base  $B$ .
-

**IV.**— Sea  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de las matrices cuadradas de elementos reales y dimensión  $n$ .

(a) Demostrar que si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es una matriz fija, el conjunto

$$S = \{B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : AB = \Omega\}$$

es un subespacio vectorial de  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

(b) Si  $n = 2$  y  $A$  es de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $\alpha, \beta$  son números reales, calcular en función de  $\alpha, \beta$  la dimensión y una base de  $S$  y las ecuaciones implícitas de un subespacio suplementario de  $S$ .

---

**V.**— En el espacio vectorial real de las matrices simétricas  $3 \times 3$  con elementos reales,  $\mathcal{S}_3$ , decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales, y para los que lo sean hallar una base, así como unas ecuaciones (paramétricas e implícitas) en la base canónica y en la base

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Matrices regulares.

(b) Matrices con traza nula.

(c) Matrices cuyas dos primeras filas son iguales.

---

**VI.**— En el espacio vectorial real  $V$  de las funciones continuas de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ , se consideran los dos conjuntos siguientes:

$$U_1 = \left\{ f \in V : \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

$$U_2 = \{f \in V : f \text{ es constante}\}$$

(a) Comprobar que  $U_1$  y  $U_2$  son subespacios vectoriales de  $V$ .

(b) Analizar si  $U_1$  y  $U_2$  son subespacios suplementarios de  $V$ .

(c) Hallar, si existe, la proyección de  $h(x) = 1 + 2x$  sobre  $U_1$  paralelamente a  $U_2$ .

**(Examen final, setiembre 2002)**

---

**VII.**— En  $\mathbb{R}^3$  y para cada  $a \in \mathbb{R}$ , consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\{(a, 1, 0), (0, a, 1), (1, 0, -1)\}, \quad V = \mathcal{L}\{(a, 0, -1), (a - 1, 0, 2a)\}.$$

- (a) Hallar la dimensión de  $U, V, U + V$  y  $U \cap V$  en función de los valores de  $a$ .
- (b) ¿Para qué valores de  $a$  los subespacios  $U$  y  $V$  son suplementarios?
- (c) Para los valores de  $a$  para los cuales sea posible, calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección sobre  $U$  paralelamente a  $V$ .
- (d) Para  $a = 0$ , ¿es posible descomponer el vector  $(1, 1, 1)$  como suma de un vector de  $U$  y otro de  $V$ ? Si existe, ¿es única esta descomposición?

**(Primer parcial, enero 2009)**

---

**VIII.**— En  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  y fijado  $k \in \mathbb{R}$  se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}, \quad V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

- (i) Calcular en función de  $k$ ,  $\dim(U)$ ,  $\dim(V)$ ,  $\dim(U \cap V)$  y  $\dim(U + V)$ .
- (ii) Para  $k = 2$  hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de  $U + V$  con respecto a la base canónica.

**IX.**— Consideremos los subespacios  $U$  y  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $U$  está generado por los vectores  $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2)$  y la ecuación implícita de  $W$  es  $x - y + 2z = 0$ . Se pide:

- (a) Bases de  $U, W, U + W$  y  $U \cap W$ .
- (b) Ecuaciones implícitas de  $U \cap W$ .
- (c) Base de un subespacio  $H$  suplementario de  $U \cap W$ .
- (d) Proyección del vector  $(2, 3, 5)$  sobre el subespacio  $U \cap W$  paralelamente a  $H$ .

**(Examen final, junio 2006)**

---

**X.**— En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ , dados dos valores reales  $a, b \in \mathbb{R}$  se definen los subespacios:

$$U = \mathcal{L}\{(1, a, 1), (b, 1, a)\}, \quad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 1), (a - 1, 1, b)\}.$$

- (a) Calcular en función de  $a$  y  $b$  la dimensión de  $U \cap V$ .
- (b) Calcular los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales los subespacios son suplementarios.
- (d) Para  $a = b = 0$  calcular las ecuaciones cartesianas y paramétricas de  $U \cap V$ .

**(Examen final, septiembre 2008)**

---