ÁLGEBRA LINEAL I — Práctica 5

Espacios vectoriales — (Curso 2020–2021)

1.– En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$ consideramos los siguientes subconjuntos:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 1\}$.

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x = 3y\}$.

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x + y = 1\}$

(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x = y;\ \text{e } y \geq 0\}$.

(e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 \geq 0\}$.

- Representarlos gráficamente.

- Basándose en su representación gráfica deducir cuales son subespacios vectoriales y cuáles no.

- Probarlo.

2.– En el espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos de matrices:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | traza(A) = 0\}$$

$$V = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Probar que B es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Calcular las ecuaciones paramétrica e implícitas de V respecto de la base B.

(iii) Calcular las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ respecto de la base B.

(Examen final, julio 2017)

3.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ consideramos los subespacios:

$U = \mathcal{L}\{(1,0,1,1), (2,0,1,3), (1,1,1,1)\}, \quad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y+z-t = 0,\ x+y-z+2t = 0\}$.

(i) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap W$ con respecto a la base canónica.

(ii) Demostrar que los vectores $B = \{(0,1,0,0), (1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.

(iii) Hallar las ecuaciones paramétricas de U e implícitas de W respecto de la base B.

(Examen final, enero 2017)

4.– En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que 3 se consideran los subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(1) = 1\}, \qquad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(1) = 0,\, p'(1) = 0\}$$

(i) Estudiar si U y V son subespacios vectoriales.

(ii) Demostrar que el conjunto $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$ es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(iii) Hallar las ecuaciones implícitas de V en la base B.

(Examen final, enero 2018)

5.– En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Se consideran los conjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \qquad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) \cdot p(0) = 0\}, \qquad W = \mathcal{L}\{1 + x^2, 1 - x\}$$

(i) Decidir razonadamente cuáles de los subconjuntos anteriores son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Hallar las ecuaciones implícitas de U y W respecto de la base canónica.

(iii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U \cap W$ respecto de la base canónica.

(iv) Demostrar que $B = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(v) Hallar las ecuaciones implícitas de $U \cap W$ respecto de la base B.

(Examen final, enero 2019)

6.– En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ consideramos las siguientes bases:

- la base canónica $C = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
- la base $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\} = \{(0,1,1), (2,0,0), (1,0,1)\}$.
- la base $B'' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \{(1,-1,0), (0,0,-1), (1,1,1)\}$.

(a) Si $(1,3,2)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ calcular sus coordenadas en cada una de las bases anteriores.

(b) Denotamos por (y_1, y_2, y_3) las coordenadas de un vector en la base B'. Consideramos el subespacio vectorial dado por la ecuacón:

$$y_1 + 2y_2 - y_3 = 0$$

Calcular las ecuaciones paramétricas y cartesianas de este subespacio con respecto a cada una de las bases dadas.

7.– En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio vectorial U cuya ecuación implícitas en la base $B = \{(0,0,1), (1,1,1), (0,1,1)\}$ es $x' + y' - 2z' = 0$ y el subespacio $V = \mathcal{L}\{(1,0,1)_C, (1,1,0)_C\}$.

(i) Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de U en la base canónica.

(i) Dar las ecuaciones implícitas en la base B de $U \cap V$.

(Examen final, julio 2015)

8.– En el espacio vectorial de matrices $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subconjuntos:

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}. \qquad V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | traza(A) = 0,\ A = A^t\}.$$

(i) Probar que V es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Demostrar que U y V son subespacios suplementarios.

(iii) Hallar la proyección de Id sobre U paralelamente a V.

(Examen final, enero 2014)

9.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(2,0,1),(0,0,1)\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(1,1,0),(1,2,3)\}$$

(i) Hallar las ecuaciones implícitas de U y V respecto de la base canónica.

(ii) Probar razonadamente que los vectores de $B = \{(0,0,1),(1,2,1),(1,3,1)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U \cap V$ respecto de la base B.

(iv) ¿Son U y V suplementarios?.

(v) Dar las ecuaciones paramétricas respecto de la base canónica de un subespacio vectorial suplementario a V.

(Examen, diciembre 2014)

10.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y dado un número real a se consideran los subespacios:

$$U = \mathcal{L}\{(1,a,0,1),(2,2,a,0),(1,1,0,a)\}, \quad V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-y=0, \quad x-z=0\}.$$

(i) Hallar la dimensión de U, V, $U+V$ y $U \cap V$ en función de a.

(ii) Para $a=1$ hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$.

(iii) Para $a=0$ probar que los subespacios U y V son suplementarios y calcular la proyección de $(1,2,1,1)$ sobre U paralelamente a V.

(Examen final, julio 2016)

11.– En el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 4, $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ se consideran los subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) | p(-1) + p'(0) = 0\}$$
$$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) | p''(0) = 0\}$$

(i) Probar que son subespacios vectoriales.

(ii) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U, V, $U+V$, $U \cap V$ con respecto a la base canónica.

(iii) ¿Son espacios suplementarios?.

Notación: $p'(x), p''(x)$ denotan respectivamente la primera y segunda derivada del polinomio.

12.– En $\mathbb{R}^4$ consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\{(b,b,1,1),(1,0,1,1),(1,1,1,1)\}$$
$$V = \mathcal{L}\{(0,0,1,1),(0,a,1,1),(0,0,0,1)\}$$

(a) Calcular la dimensión de $U \cap V$ en función de a y b.

(c) Para $a = 1$ y $b = 0$ escribir las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ respecto de la base canónica.

(Examen final, junio 2008)

13.– En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | rango(A) < 2\}, \qquad V = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \middle| traza\left(A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0\right\}$$

$$W = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

(i) Decidir razonadamente cuáles de los subconjuntos anteriores son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de V respecto de la base canónica.

(iii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $V \cap W$ respecto de la base canónica.

(iv) Demostrar que $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(v) Hallar las ecuaciones implícitas de V respecto de la base B.

(Examen final, julio 2019)

14.– Sea V un espacio vectorial real y U_1, U_2, U_3 subespacios vectoriales. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones probando aquellas que sean ciertas y descartando con un contraejemplo las falsas.

(a) $(U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3) \subset U_1 + (U_2 \cap U_3)$.

(b) $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$.

(Primer parcial, enero 2009)

15.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Consideramos los subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) |\ 1 \text{ es raíz de } p(x)\}.$$
$$W = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) |\ \text{grado } p(x) \leq 1\}.$$
$$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) |\ 0 \text{ y } -1 \text{ son raíces de } p(x)\}.$$

(a) Probar que U, V y W son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(b) Estudiar si tiene sentido plantear las siguientes proyecciones:

- La proyección del polinomio $x^2 + x + 1$ sobre U paralelamente a V.

- La proyección del polinomio $x^2 + x + 1$ sobre U paralelamente a W.

En caso afirmativo, calcular dicha proyección.

(Primer parcial, enero 2007)

16.– Sea V un espacio vectorial que tiene un sistema generador formado por 2018 vectores. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) V tiene un sistema de 2018 vectores linealmente independientes.

(ii) $dim(V) \geq 2018$.

(iii) $dim(V) \leq 2018$.

(iv) Cualquier subconjunto de V formado por 2019 vectores es un sistema de vectores linealmente dependientes.

(Examen final, julio 2018)

I.– En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$V = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = -A^t\}.$$

(i) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U y $U + V$ respecto de la base canónica.

(ii) ¿Son U y V subespacios suplementarios?.

(iii) Probar que los vectores:

$$B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

son una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(iv) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U en la base B.

(Examen final, enero 2016)

II.– Sea V un espacio vectorial cualquiera. Dados tres subespacios vectoriales A, B, C, estudiar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

○ $(A + B) \cap C \neq (A \cap C) + (B \cap C)$.

○ $(A + B) \cap C \subset (A \cap C) + (B \cap C)$.

○ $(A + B) \cap C \supset (A \cap C) + (B \cap C)$.

○ $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$.

(Primer parcial, enero 2007)

III.– Sea el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ continua }\}$. Consideramos el subespacio:

$$W = \mathcal{L}\{sin^2(x/2), cos(x), cos(\frac{\pi}{2} - x), 2\}$$

(i) Probar que los vectores de $B = \{sin(x), cos(x), 1\}$ son un sistema libre.

(ii) Probar que B es una base de W.

(iii) Fijado $a \in R$, probar que $sin(x + a) \in W$.

(iv) Escribir las coordenadas de $sin(x + a)$ respecto de la base B.

IV.– Sea $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathrm{I\!R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de elementos reales y dimensión n.

(a) Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathrm{I\!R})$ es una matriz fija, el conjunto

$$S = \{B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathrm{I\!R}) : AB = \Omega\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathrm{I\!R})$.

(b) Si $n = 2$ y A es de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

donde α, β son números reales, calcular en función de α, β la dimensión y una base de S y las ecuaciones implícitas de un subespacio suplementario de S.

V.– En el espacio vectorial real de las matrices simétricas 3×3 con elementos reales, $\mathcal{S}_3$, decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales, y para los que lo sean hallar una base, así como unas ecuaciones (paramétricas e implícitas) en la base canónica y en la base

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Matrices regulares.

(b) Matrices con traza nula.

(c) Matrices cuyas dos primeras filas son iguales.

VI.– En el espacio vectorial real V de las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathrm{I\!R}$, se consideran los dos conjuntos siguientes:

$$U_1 = \left\{ f \in V \ : \ \int_0^1 f(x)\ dx = 0 \right\}$$
$$U_2 = \{ f \in V \ : \ f \ \text{ es } \ \text{constante} \}$$

(a) Comprobar que U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V.

(b) Analizar si U_1 y U_2 son subespacios suplementarios de V.

(c) Hallar, si existe, la proyección de $h(x) = 1 + 2x$ sobre U_1 paralelamente a U_2.

(Examen final, setiembre 2002)

VII.– En $\mathbb{R}^3$ y para cada $a \in \mathbb{R}$, consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\{(a, 1, 0), (0, a, 1), (1, 0, -1)\}, \quad V = \mathcal{L}\{(a, 0, -1), (a-1, 0, 2a)\}.$$

(a) Hallar la dimensión de $U, V, U+V$ y $U \cap V$ en función de los valores de a.

(b) ¿Para qué valores de a los subespacios U y V son suplementarios?.

(c) Para los valores de a para los cuales sea posible, calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección sobre U paralelamente a V.

(d) Para $a = 0$, ¿es posible descomponer el vector $(1, 1, 1)$ como suma de un vector de U y otro de V?. Si existe, ¿es única esta descomposición?.

(Primer parcial, enero 2009)

VIII.– En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y fijado $k \in \mathbb{R}$ se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}, \quad V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

(i) Calcular en función de k, $dim(U), dim(V), dim(U \cap V)$ y $dim(U+V)$.

(ii) Para $k = 2$ hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U+V$ con respecto a la base canónica.

IX.– Consideremos los subespacios U y W de $\mathbb{R}^3$ tales que U está generado por los vectores $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2)$ y la ecuación implícita de W es $x - y + 2z = 0$. Se pide:

(a) Bases de U, W, $U+W$ y $U \cap W$.

(b) Ecuaciones implícitas de $U \cap W$.

(c) Base de un subespacio H suplementario de $U \cap W$.

(d) Proyección del vector $(2, 3, 5)$ sobre el subespacio $U \cap W$ paralelamente a H.

(Examen final, junio 2006)

X.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, dados dos valores reales $a, b \in R$ se definen los subespacios:

$$U = \mathcal{L}\{(1, a, 1), (b, 1, a)\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 1), (a-1, 1, b)\}.$$

(a) Calcular en función de a y b la dimensión de $U \cap V$.

(b) Calcular los valores de a y b para los cuales los subespacios son suplementarios.

(d) Para $a = b = 0$ calcular las ecuaciones cartesianas y paramétricas de $U \cap V$.

(Examen final, septiembre 2008)
