

1.– En el espacio vectorial real \mathbb{R}^2 consideramos los siguientes subconjuntos:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3y\}$.

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y; e y \geq 0\}$.

(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 0\}$.

- Representarlos gráficamente.

- Basándose en su representación gráfica deducir cuales son subespacios vectoriales y cuáles no.

- Probarlo.

2.– En el espacio vectorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos de matrices:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{traza}(A) = 0\}$$

$$V = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Probar que B es una base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Calcular las ecuaciones paramétrica e implícitas de V respecto de la base B .

(iii) Calcular las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ respecto de la base B .

(Examen final, julio 2017)

3.– En el espacio vectorial \mathbb{R}^4 consideramos los subespacios:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 3), (1, 1, 1, 1)\}, \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-t = 0, x+y-z+2t = 0\}.$$

(i) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap W$ con respecto a la base canónica.

(ii) Demostrar que los vectores $B = \{(0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ forman una base de \mathbb{R}^4 .

(iii) Hallar las ecuaciones paramétricas de U e implícitas de W respecto de la base B .

(Examen final, enero 2017)

4.— En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que 3 se consideran los subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(1) = 1\}, \quad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(1) = 0, p'(1) = 0\}$$

- (i) Estudiar si U y V son subespacios vectoriales.
- (ii) Demostrar que el conjunto $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$ es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
- (iii) Hallar las ecuaciones implícitas de V en la base B .

(Examen final, enero 2018)

5.— En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Se consideran los conjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \quad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) \cdot p(0) = 0\}, \quad W = \mathcal{L}\{1+x^2, 1-x\}$$

- (i) Decidir razonadamente cuáles de los subconjuntos anteriores son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (ii) Hallar las ecuaciones implícitas de U y W respecto de la base canónica.
- (iii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U \cap W$ respecto de la base canónica.
- (iv) Demostrar que $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (v) Hallar las ecuaciones implícitas de $U \cap W$ respecto de la base B .

(Examen final, enero 2019)

6.— En el espacio vectorial real \mathbb{R}^3 consideramos las siguientes bases:

- la base canónica $C = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

- la base $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\} = \{(0, 1, 1), (2, 0, 0), (1, 0, 1)\}$.

- la base $B'' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \{(1, -1, 0), (0, 0, -1), (1, 1, 1)\}$.

- (a) Si $(1, 3, 2)$ es un vector de \mathbb{R}^3 calcular sus coordenadas en cada una de las bases anteriores.
- (b) Denotamos por (y_1, y_2, y_3) las coordenadas de un vector en la base B' . Consideramos el subespacio vectorial dado por la ecuación:

$$y_1 + 2y_2 - y_3 = 0$$

Calcular las ecuaciones paramétricas y cartesianas de este subespacio con respecto a cada una de las bases dadas.

7.— En \mathbb{R}^3 se considera el subespacio vectorial U cuya ecuación implícitas en la base $B = \{(0, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ es $x' + y' - 2z' = 0$ y el subespacio $V = \mathcal{L}\{(1, 0, 1)_C, (1, 1, 0)_C\}$.

- (i) Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de U en la base canónica.
- (i) Dar las ecuaciones implícitas en la base B de $U \cap V$.

(Examen final, julio 2015)

8.— En el espacio vectorial de matrices $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subconjuntos:

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad V = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{traza}(A) = 0, A = A^t\}.$$

- (i) Probar que V es un subespacio vectorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (ii) Demostrar que U y V son subespacios suplementarios.
- (iii) Hallar la proyección de Id sobre U paralelamente a V .

(Examen final, enero 2014)

9.— En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (2, 0, 1), (0, 0, 1)\}, \quad V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 2, 3)\}$$

- (i) Hallar las ecuaciones implícitas de U y V respecto de la base canónica.
- (ii) Probar razonadamente que los vectores de $B = \{(0, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 3, 1)\}$ forman una base de \mathbb{R}^3 .
- (iii) Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U \cap V$ respecto de la base B .
- (iv) ¿Son U y V suplementarios?
- (v) Dar las ecuaciones paramétricas respecto de la base canónica de un subespacio vectorial suplementario a V .

(Examen, diciembre 2014)

10.— En el espacio vectorial \mathbb{R}^4 y dado un número real a se consideran los subespacios:

$$U = \mathcal{L}\{(1, a, 0, 1), (2, 2, a, 0), (1, 1, 0, a)\}, \quad V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, x - z = 0\}.$$

- (i) Hallar la dimensión de U , V , $U + V$ y $U \cap V$ en función de a .
- (ii) Para $a = 1$ hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$.
- (iii) Para $a = 0$ probar que los subespacios U y V son suplementarios y calcular la proyección de $(1, 2, 1, 1)$ sobre U paralelamente a V .

(Examen final, julio 2016)

11.— En el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 4, $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ se consideran los subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p(-1) + p'(0) = 0\}$$
$$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p''(0) = 0\}$$

- (i) Probar que son subespacios vectoriales.
- (ii) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U , V , $U + V$, $U \cap V$ con respecto a la base canónica.
- (iii) ¿Son espacios suplementarios?

Notación: $p'(x)$, $p''(x)$ denotan respectivamente la primera y segunda derivada del polinomio.

12.— En \mathbb{R}^4 consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\{(b, b, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

$$V = \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 1), (0, a, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

- (a) Calcular la dimensión de $U \cap V$ en función de a y b .
(c) Para $a = 1$ y $b = 0$ escribir las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ respecto de la base canónica.

(Examen final, junio 2008)

13.— En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{rango}(A) < 2\}, \quad V = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{traza} \left(A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$$

$$W = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- (i) Decidir razonadamente cuáles de los subconjuntos anteriores son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
(ii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de V respecto de la base canónica.
(iii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $V \cap W$ respecto de la base canónica.
(iv) Demostrar que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
(v) Hallar las ecuaciones implícitas de V respecto de la base B .

(Examen final, julio 2019)

14.— Sea V un espacio vectorial real y U_1, U_2, U_3 subespacios vectoriales. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones probando aquellas que sean ciertas y descartando con un contraejemplo las falsas.

- (a) $(U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3) \subset U_1 + (U_2 \cap U_3)$.
(b) $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$.

(Primer parcial, enero 2009)

15.— Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Consideramos los subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid 1 \text{ es raíz de } p(x)\}.$$

$$W = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid \text{grado } p(x) \leq 1\}.$$

$$V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid 0 \text{ y } -1 \text{ son raíces de } p(x)\}.$$

- (a) Probar que U , V y W son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
(b) Estudiar si tiene sentido plantear las siguientes proyecciones:
- La proyección del polinomio $x^2 + x + 1$ sobre U paralelamente a V .
- La proyección del polinomio $x^2 + x + 1$ sobre U paralelamente a W .

En caso afirmativo, calcular dicha proyección.

(Primer parcial, enero 2007)

16.— Sea V un espacio vectorial que tiene un sistema generador formado por 2018 vectores. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i) V tiene un sistema de 2018 vectores linealmente independientes.
- (ii) $\dim(V) \geq 2018$.
- (iii) $\dim(V) \leq 2018$.
- (iv) Cualquier subconjunto de V formado por 2019 vectores es un sistema de vectores linealmente dependientes.

(Examen final, julio 2018)

I.— En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$V = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}.$$

- (i) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U y $U + V$ respecto de la base canónica.
- (ii) ¿Son U y V subespacios suplementarios?
- (iii) Probar que los vectores:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

son una base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (iv) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U en la base B .

(Examen final, enero 2016)

II.— Sea V un espacio vectorial cualquiera. Dados tres subespacios vectoriales A, B, C , estudiar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

- $(A + B) \cap C \neq (A \cap C) + (B \cap C)$.
- $(A + B) \cap C \subset (A \cap C) + (B \cap C)$.
- $(A + B) \cap C \supset (A \cap C) + (B \cap C)$.
- $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$.

(Primer parcial, enero 2007)

III.— Sea el espacio vectorial sobre \mathbb{R} , $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$. Consideramos el subespacio:

$$W = \mathcal{L} \left\{ \sin^2(x/2), \cos(x), \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), 2 \right\}$$

- (i) Probar que los vectores de $B = \{\sin(x), \cos(x), 1\}$ son un sistema libre.
 - (ii) Probar que B es una base de W .
 - (iii) Fijado $a \in \mathbb{R}$, probar que $\sin(x + a) \in W$.
 - (iv) Escribir las coordenadas de $\sin(x + a)$ respecto de la base B .
-

IV.— Sea $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de elementos reales y dimensión n .

(a) Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es una matriz fija, el conjunto

$$S = \{B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : AB = \Omega\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(b) Si $n = 2$ y A es de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

donde α, β son números reales, calcular en función de α, β la dimensión y una base de S y las ecuaciones implícitas de un subespacio suplementario de S .

V.— En el espacio vectorial real de las matrices simétricas 3×3 con elementos reales, \mathcal{S}_3 , decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales, y para los que lo sean hallar una base, así como unas ecuaciones (paramétricas e implícitas) en la base canónica y en la base

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Matrices regulares.

(b) Matrices con traza nula.

(c) Matrices cuyas dos primeras filas son iguales.

VI.— En el espacio vectorial real V de las funciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , se consideran los dos conjuntos siguientes:

$$U_1 = \left\{ f \in V : \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

$$U_2 = \{f \in V : f \text{ es constante}\}$$

(a) Comprobar que U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V .

(b) Analizar si U_1 y U_2 son subespacios suplementarios de V .

(c) Hallar, si existe, la proyección de $h(x) = 1 + 2x$ sobre U_1 paralelamente a U_2 .

(Examen final, setiembre 2002)

VII.— En \mathbb{R}^3 y para cada $a \in \mathbb{R}$, consideramos los subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\{(a, 1, 0), (0, a, 1), (1, 0, -1)\}, \quad V = \mathcal{L}\{(a, 0, -1), (a - 1, 0, 2a)\}.$$

- (a) Hallar la dimensión de $U, V, U + V$ y $U \cap V$ en función de los valores de a .
- (b) ¿Para qué valores de a los subespacios U y V son suplementarios?
- (c) Para los valores de a para los cuales sea posible, calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección sobre U paralelamente a V .
- (d) Para $a = 0$, ¿es posible descomponer el vector $(1, 1, 1)$ como suma de un vector de U y otro de V ? Si existe, ¿es única esta descomposición?

(Primer parcial, enero 2009)

VIII.— En $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y fijado $k \in \mathbb{R}$ se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}, \quad V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

- (i) Calcular en función de k , $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U \cap V)$ y $\dim(U + V)$.
- (ii) Para $k = 2$ hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U + V$ con respecto a la base canónica.

IX.— Consideremos los subespacios U y W de \mathbb{R}^3 tales que U está generado por los vectores $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2)$ y la ecuación implícita de W es $x - y + 2z = 0$. Se pide:

- (a) Bases de $U, W, U + W$ y $U \cap W$.
- (b) Ecuaciones implícitas de $U \cap W$.
- (c) Base de un subespacio H suplementario de $U \cap W$.
- (d) Proyección del vector $(2, 3, 5)$ sobre el subespacio $U \cap W$ paralelamente a H .

(Examen final, junio 2006)

X.— En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 , dados dos valores reales $a, b \in \mathbb{R}$ se definen los subespacios:

$$U = \mathcal{L}\{(1, a, 1), (b, 1, a)\}, \quad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 1), (a - 1, 1, b)\}.$$

- (a) Calcular en función de a y b la dimensión de $U \cap V$.
- (b) Calcular los valores de a y b para los cuales los subespacios son suplementarios.
- (d) Para $a = b = 0$ calcular las ecuaciones cartesianas y paramétricas de $U \cap V$.

(Examen final, septiembre 2008)
