

1.– Hallar la forma reducida equivalente por filas de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

---

2.– Obtener mediante transformaciones elementales el rango, la forma canónica  $B$  respecto de la equivalencia y matrices no singulares  $P$  y  $Q$  que cumplan  $B = PAQ$ , siendo  $A$  la matriz del problema anterior.

---

3.– Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (i) Hallar (si existe) una matriz inversible  $X$  tal que  $XA = B$ .
- (ii) Hallar (si existe) una matriz inversible  $Y$  tal que  $AY = B$ .
- (iii) ¿Son  $A$  y  $B$  matrices equivalentes?.
- (iv) Estudiar si  $AA^t$  y  $BB^t$  son congruentes.

**(Examen final, julio 2020)**

---

4.– Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- (i) Estudiar para que valores de  $a, b$  las matrices son equivalentes por filas.
- (ii) Estudiar para que valores de  $a, b$  las matrices son equivalentes por columnas.
- (iii) Para los valores de  $a, b$  obtenidos en (i) dar una matriz inversible  $P$  tal que  $PA = B$ .

**(Examen final, enero 2024)**

---

5.– Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Hallar, si existe, una matriz inversible  $P$  tal que  $PAP^t = B$ .

**(Examen final, enero 2024)**

---

6.– Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ .

- (i) Estudiar para que valores de  $a, b, c$  las matrices  $A$  y  $B$  son congruentes.
- (ii) Estudiar para que valores de  $a$  existe una matriz inversible  $P$  tal que  $PAP^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ . En tales casos calcular  $P$ .

**(Examen final, enero 2020)**

7.– Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & a & 6 \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$

- (i) Estudiar para que valores de  $a, b$  las matrices son equivalentes por filas.
- (ii) Hallar (si existe) una matriz  $X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  inversible tal que  $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**(Examen final, enero 2025)**

8.– Sean  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  e  $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

- (i) Hallar los valores de  $a$  para que  $X$  e  $Y$  sean equivalentes por filas.
- (ii) Hallar los valores de  $a$  para que  $X$  e  $Y$  sean equivalentes por columnas.

**(Examen final, julio 2017)**

9.– Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , hallar los valores de  $a$  y  $b$  para que  $A$  y  $B$  sean congruentes. Para tales valores dar una matriz  $P$  tal que  $PAP^t = B$ .

**(Examen final, julio 2024)**

10.– Obtener mediante transformaciones elementales las inversas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.– Discutir y, en su caso, resolver, en función del parámetro o parámetros correspondientes, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + ay = b \\ bx + ay = a \\ abx + aby = 1 \end{cases}$$


---

12.– Encontrar un sistema de ecuaciones cuya solución sea la siguiente:

$$\begin{cases} x^1 = 2\lambda - \mu \\ x^2 = \lambda - 2\mu + \delta \\ x^3 = -\lambda + \mu - 2\delta \\ x^4 = \lambda + 2\delta \end{cases} \quad (\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R})$$


---

13.– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales  $A$  y  $B$  son

- (i) Equivalentes por filas.
- (ii) Equivalentes por columnas.
- (iii) Equivalentes.
- (iv) Congruentes. En este caso dar además una matriz inversible  $P$  tal que  $P^t A P = B$ .

**(Examen final, julio 2025)**

---

14.– Dar tres matrices distintas  $A, B, C \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  y no diagonales tales que  $A$  y  $B$  sean congruentes y equivalentes por filas y  $A$  y  $C$  sean equivalentes por filas pero no congruentes. Justifica la respuesta.

**(Examen final, julio 2025)**

---

15.– Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  dos matrices. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Si  $\text{rango}(A) + \text{rango}(B) = 199$  entonces  $A$  y  $B$  no son equivalentes por filas.
- (ii) Si  $A$  y  $B$  son equivalentes por filas y tienen rango  $m$  entonces son equivalentes por columnas.
- (iii) Si  $A$  y  $B$  son equivalentes por filas entonces  $A + B$  y  $A - B$  son equivalentes por filas.
- (iv)  $\text{rango}(AB) = \text{rango}(BA)$ .

**(Examen final, enero 2020)**

---

**16.**— Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

- (i) Si  $A$  es simétrica y no singular, entonces es congruente con  $I_n$ .
  - (ii) Si  $A$  es no singular, entonces es equivalente por columnas a  $I_n$ .
  - (iii) Todas las matrices de  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  con el mismo rango que  $A$  son equivalentes a  $A$ .
  - (iv) Si  $A$  es semejante a  $I_n$  entonces  $A = I_n$ .
-

**I.**– Demostrar que las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

son congruentes. Dar una matriz  $P$  inversible tal que  $B = P^t A P$ .

**(Examen final, enero 2018)**

---

**II.**– Se consideran la matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & m \\ 1-m & m & 0 & 1 \\ m-1 & 1 & m & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar  $m$  para que las matrices  $A$  y  $M$  sean equivalentes.

**(Examen extraordinario, diciembre 2007)**

---

**III.**– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiar para que valores de  $k$  existe una matriz  $X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  inversible tal que  $XA = B$ , dando en esos casos la matriz  $X$ .

**(Examen final, enero 2022)**

---

**IV.**– Dada la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$$

- (a) Hallar todos los valores de  $a, b$  para los cuáles  $B$  diagonaliza por congruencia.
- (b) Hallar todos los valores de  $a, b$  para los cuáles  $B$  es congruente en  $\mathbb{R}$  con:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- (c) Hallar todos los valores de  $a, b$  para los cuáles  $B$  es congruente en  $\mathbb{R}$  con la identidad

**(Examen final, enero 2011)**

---

**V.**— Dado  $k \in \mathbb{R}$ , se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$

Explicar de manera razonada si cada una de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

- i) Si  $k = 1$  son congruentes.
- ii) Para  $k = 2$  son equivalentes por filas.
- iii) Para  $k = 2$  son equivalentes por columnas.

**(Primer parcial, enero 2009)**

---

**VI.**— Sean las matrices real es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

¿Es posible encontrar una matriz  $X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tal que  $AX = B$ ? ¿Y una matriz  $Y \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  tal que  $YA = B$ ? Razona las respuestas.

---

**VII.**— Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , obtener mediante transformaciones elementales y cuando sea posible, la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a \end{pmatrix}$$

---

**VIII.**— Obtener la forma canónica de la siguiente matriz respecto de la congruencia sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  y sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$ , así como las matrices de paso:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

---

**IX.**— Sean  $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  dos matrices con el mismo determinante y la misma traza. ¿Es posible que  $A$  y  $B$  no sean equivalentes? ¿Y si además son simétricas? Razona las respuestas.

**(Primer parcial, enero 2010)**

---

**X.**– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Estudiar que parejas de matrices son equivalentes.
- (ii) Estudiar que parejas de matrices son semejantes.
- (iii) Estudiar que parejas de matrices son congruentes, dando para cada una de ellas la correspondiente matriz de paso por congruencia.

**(Examen de julio de 2015)**

---

**XI.**– Discutir y, en su caso, resolver, en función de los parámetros correspondientes, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + 2z &= 2 \\ 5x + 2y &= 1 \\ x - 2y + bz &= 3 \end{cases}$$

---

**XII.**– Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i) Si  $\det(A) \neq 0$  y además  $A$  y  $B$  son equivalentes por filas entonces también son equivalentes por columnas.
- (ii) Si  $\det(A) = \det(B) = 0$  entonces  $A$  y  $B$  son equivalentes.
- (iii)  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .
- (iv) Si  $A$  y  $B$  son congruentes entonces  $\text{signo}(\text{traza}(A)) = \text{signo}(\text{traza}(B))$ .

**(Examen de julio de 2019)**

---

**XIII.**– Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , con  $\det(A) = 1$  y  $\det(B) = 2$ . Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i)  $A$  y  $B$  son congruentes.
- (ii)  $A$  y  $B$  pueden ser congruentes.
- (iii)  $A$  y  $B$  pueden ser semejantes.
- (iv) Si  $A = Id$  y  $\text{traza}(B) = 0$  entonces  $A$  y  $B$  no son congruentes.

**(Examen final, julio 2017)**

---

**XIV.**— Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  matrices simétricas. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i) Si  $A$  y  $B$  son congruentes entonces tienen el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal.
- (ii) Si  $\text{signo}(\det(A)) = \text{signo}(\det(B))$  entonces  $A$  y  $B$  son congruentes.
- (iii)  $AB - BA$  es una matriz hemisimétrica.
- (iv)  $AB$  es una matriz simétrica.

**(Examen final, enero 2019)**

---