ÁLGEBRA LINEAL I — Práctica 4

Equivalencia de matrices. Sistemas de ecuaciones (Curso 2024–2025)

1.– Hallar la forma reducida equivalente por filas de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

2.– Obtener mediante transformaciones elementales el rango, la forma canónica B respecto de la equivalencia y matrices no singulares P y Q que cumplan $B = PAQ$, siendo A la matriz del problema anterior.

3.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Hallar (si existe) una matriz inversible X tal que $XA = B$.

(ii) Hallar (si existe) una matriz inversible Y tal que $AY = B$.

(iii) ¿Son A y B matrices equivalentes?.

(iv) Estudiar si AA^t y BB^t son congruentes.

(Examen final, julio 2020)

4.– Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Estudiar para que valores de a, b las matrices son equivalentes por filas.

(ii) Estudiar para que valores de a, b las matrices son equivalentes por columnas.

(iii) Para los valores de a, b obtenidos en (i) dar una matriz inversible P tal que $PA = B$.

(Examen final, enero 2024)

5.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$.

(i) Estudiar para que valores de a, b, c las matrices A y B son congruentes.

(ii) Estudiar para que valores de a existe una matriz inversible P tal que $PAP^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. En tales casos calcular P.

(Examen final, enero 2020)

6.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar, si existe, una matriz inversible P tal que $PAP^t = B$.

(Examen final, enero 2024)

7.– Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Estudiar para que valores de a existe una matriz $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ inversible tal que $XA = B$. En esos casos dar una matriz X verificando la ecuación.

(Examen final, enero 2021)

8.– Sean $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(i) Hallar los valores de a para que X e Y sean equivalentes por filas.

(ii) Hallar los valores de a para que X e Y sean equivalentes por columnas.

(Examen final, julio 2017)

9.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, hallar los valores de a y b para que A y B sean congruentes. Para tales valores dar una matriz P tal que $PAP^t = B$.

(Examen final, julio 2024)

10.– Obtener mediante transformaciones elementales las inversas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.– Discutir y, en su caso, resolver, en función del parámetro o parámetros correspondientes, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & a \\ x+y+az & = & a^2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+ay & = & b \\ bx+ay & = & a \\ abx+aby & = & 1 \end{array}\right.$$

12.– Encontrar un sistema de ecuaciones cuya solución sea la siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^1 & = & 2\lambda-\mu \\ x^2 & = & \lambda-2\mu+\delta \\ x^3 & = & -\lambda+\mu-2\delta \\ x^4 & = & \lambda+2\delta \end{array}\right. \qquad (\lambda,\ \mu,\ \delta \in \mathbb{R})$$

13.– Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$:

(i) Dar dos matrices simétricas inversibles 2×2 que NO sean congruentes con A ni congruentes entre sí.

(ii) Estudiar para que valores de a, la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ es congruente con A. Para $a = -3$ dar una matriz inversible P tal que $PAP^t = B$.

(Examen final, enero 2022)

14.– Dar un ejemplo de tres matrices $A, B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simétricas, inversibles y no diagonales, de manera que A y B sean congruentes, pero C no sea congruente con A. Justificar la respuesta.

(Examen final, julio 2016)

15.– Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ dos matrices. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Si $rango(A) + rango(B) = 199$ entonces A y B no son equivalentes por filas.

(ii) Si A y B son equivalentes por filas y tienen rango m entonces son equivalentes por columnas.

(iii) Si A y B son equivalentes por filas entonces $A + B$ y $A - B$ son equivalentes por filas.

(iv) $rango(AB) = rango(BA)$.

(Examen final, enero 2020)

16.– Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si A es simétrica y no singular, entonces es congruente con I_n.

(ii) Si A es no singular, entonces es equivalente por columnas a I_n.

(iii) Todas las matrices de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con el mismo rango que A son equivalentes a A.

(iv) Si A es semejante a I_n entonces $A = I_n$.

I.– Demostrar que las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

son congruentes. Dar una matriz P inversible tal que $B = P^t AP$.

(Examen final, enero 2018)

II.– Se consideran la matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & m \\ 1-m & m & 0 & 1 \\ m-1 & 1 & m & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar m para que las matrices A y M sean equivalentes.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)

III.– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiar para que valores de k existe una matriz $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ inversible tal que $XA = B$, dando en esos casos la matriz X.

(Examen final, enero 2022)

IV.– Dada la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$$

(a) Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B diagonaliza por congruencia.

(b) Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B es congruente en $\mathbb{R}$ con:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(c) Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B es congruente en $\mathbb{R}$ con la identidad

(Examen final, enero 2011)

V.– Dado $k \in \mathbb{R}$, se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$

Explicar de manera razonada si cada una de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

i) Si $k = 1$ son congruentes.

ii) Para $k = 2$ son equivalentes por filas.

iii) Para $k = 2$ son equivalentes por columnas.

(Primer parcial, enero 2009)

VI.– Sean las matrices real es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

¿Es posible encontrar una matriz $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $AX = B$?. ¿Y una matriz $Y \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $YA = B$?. Razona las respuestas.

VII.– Dados $a, b \in \mathbb{R}$, obtener mediante transformaciones elementales y cuando sea posible, la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a \end{pmatrix}$$

VIII.– Obtener la forma canónica de la siguiente matriz respecto de la congruencia sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, así como las matrices de paso:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

IX.– Sean $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dos matrices con el mismo determinante y la misma traza. ¿Es posible que A y B no sean equivalentes?. ¿Y si además son simétricas?. Razona las respuestas.

(Primer parcial, enero 2010)

X.– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar que parejas de matrices son equivalentes.

(ii) Estudiar que parejas de matrices son semejantes.

(iii) Estudiar que parejas de matrices son congruentes, dando para cada una de ellas la correspondiente matriz de paso por congruencia.

(Examen de julio de 2015)

XI.– Discutir y, en su caso, resolver, en función de los parámetros correspondientes, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + 2z &= 2 \\ 5x + 2y &= 1 \\ x - 2y + bz &= 3 \end{cases}$$

XII.– Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Si $det(A) \neq 0$ y además A y B son equivalentes por filas entonces también son equivalentes por columnas.

(ii) Si $det(A) = det(B) = 0$ entonces A y B son equivalentes.

(iii) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

(iv) Si A y B son congruentes entonces $signo(traza(A)) = signo(traza(B))$.

(Examen de julio de 2019)

XIII.– Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, con $det(A) = 1$ y $det(B) = 2$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) A y B son congruentes.

(ii) A y B pueden ser congruentes.

(iii) A y B pueden ser semejantes.

(iv) Si $A = Id$ y $traza(B) = 0$ entonces A y B no son congruentes.

(Examen final, julio 2017)

XIV.– Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matrices simétricas. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Si A y B son congruentes entonces tienen el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal.

(ii) Si $signo(det(A)) = signo(det(B))$ entonces A y B son congruentes.

(iii) $AB - BA$ es una matriz hemisimétrica.

(iv) AB es una matriz simétrica.

(Examen final, enero 2019)