

1.– Hallar la forma reducida equivalente por filas de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

---

2.– Obtener mediante transformaciones elementales el rango, la forma canónica  $B$  respecto de la equivalencia y matrices no singulares  $P$  y  $Q$  que cumplan  $B = PAQ$ , siendo  $A$  la matriz del problema anterior.

---

3.– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (i) Estudiar si  $A$  y  $B$  son equivalentes por filas. En caso afirmativo dar una matriz  $P$  inversible tal que  $PA = B$ .
- (ii) Estudiar si  $A$  y  $B$  son equivalentes por columnas. En caso afirmativo dar una matriz  $Q$  inversible tal que  $AQ = B$ .
- (iii) Estudiar si  $A$  y  $B$  son equivalentes. En caso afirmativo dar matrices  $P, Q$  inversibles tal que  $PAQ = B$ .

**(Examen final, enero 2014)**

---

4.– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

- (i) Estudiar para que valores de  $a$  y  $b$  son equivalentes por filas.
- (ii) Estudiar para que valores de  $a$  y  $b$  son equivalentes.
- (iii) Para  $a = -5$  y  $b = 0$  hallar (si existe) una matriz inversible  $X$  tal que  $XA = B$ .
- (iv) Para  $a = -5$  y  $b = 0$  hallar (si existe) una matriz inversible  $X$  tal que  $AX = B$ .

**(Examen final, enero 2015)**

---

5.– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix},$$

hallar los valores de  $a$  para que sean:

- (i) Equivalentes por filas.
- (ii) Equivalentes por columnas.
- (iii) Equivalentes.
- (iv) Congruentes (para algún valor de  $a$  para el cuál sean congruentes, hallar además la matriz de paso).

**(Examen final, enero 2013)**

---

6.– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hallar una matriz  $X \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  verificando  $XAX^t = B$ .

**(Examen final, enero 2012)**

---

7.– Sean  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  e  $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

- (i) Hallar los valores de  $a$  para que  $X$  e  $Y$  sean equivalentes por filas.
- (ii) Hallar los valores de  $a$  para que  $X$  e  $Y$  sean equivalentes por columnas.

**(Examen final, julio 2017)**

---

8.– Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (i) Estudiar en función de  $a$  y  $b$  cuando las matrices  $A$  y  $B$  son congruentes.
- (ii) Para  $b = 1$  y  $a = 0$  hallar una matriz  $P$  inversible tal que  $P^tAP = B$ .

**(Examen final, julio 2019)**

---

9.– Obtener mediante transformaciones elementales las inversas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.– Discutir y, en su caso, resolver, en función del parámetro o parámetros correspondientes, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + ay = b \\ bx + ay = a \\ abx + aby = 1 \end{cases}$$

11.– Encontrar un sistema de ecuaciones cuya solución sea la siguiente:

$$\begin{cases} x^1 = 2\lambda - \mu \\ x^2 = \lambda - 2\mu + \delta \\ x^3 = -\lambda + \mu - 2\delta \\ x^4 = \lambda + 2\delta \end{cases} \quad (\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R})$$

12.– Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Hallar en cada caso y cuando sea posible, una matriz inversible  $X$  verificando:

(a)  $XA = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 17 \\ 31 & 32 & 33 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(b)  $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(c)  $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

(Primer parcial, enero 2007)

13.– Dado  $a \in \mathbb{R}$  se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 - a \end{pmatrix}$$

Determinar los valores de  $a$  para los cuáles las matrices  $A$  y  $B$  son congruentes. Para  $a = 4$  hallar una matriz  $P$  inversible tal que  $PAP^t = B$ .

**(Examen final, enero 2017)**

---

14.– Dar un ejemplo de tres matrices  $A, B, C \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  simétricas, inversibles y no diagonales, de manera que  $A$  y  $B$  sean congruentes, pero  $C$  no sea congruente con  $A$ . Justificar la respuesta.

**(Examen final, julio 2016)**

---

15.– Sean  $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , con  $\det(A) = 1$  y  $\det(B) = 2$ . Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i)  $A$  y  $B$  son congruentes.
- (ii)  $A$  y  $B$  pueden ser congruentes.
- (iii)  $A$  y  $B$  pueden ser semejantes.
- (iv) Si  $A = Id$  y  $\text{traza}(B) = 0$  entonces  $A$  y  $B$  no son congruentes.

**(Examen final, julio 2017)**

---

16.– Sean  $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  matrices simétricas. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i) Si  $A$  y  $B$  son congruentes entonces tienen el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal.
- (ii) Si  $\text{signo}(\det(A)) = \text{signo}(\det(B))$  entonces  $A$  y  $B$  son congruentes.
- (iii)  $AB - BA$  es una matriz hemisimétrica.
- (iv)  $AB$  es una matriz simétrica.

**(Examen final, enero 2019)**

---

I.– Demostrar que las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

son congruentes. Dar una matriz  $P$  inversible tal que  $B = P^t A P$ .

**(Examen final, enero 2018)**

---

II.– Se consideran la matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & m \\ 1-m & m & 0 & 1 \\ m-1 & 1 & m & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar  $m$  para que las matrices  $A$  y  $M$  sean equivalentes.

**(Examen extraordinario, diciembre 2007)**

---

III.– Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales la matriz  $A$  es equivalente por filas a  $B$  y equivalente por columnas a  $C$ .

**(Examen final, julio 2012)**

---

IV.– Dada la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$$

(a) Hallar todos los valores de  $a, b$  para los cuáles  $B$  diagonaliza por congruencia.

(b) Hallar todos los valores de  $a, b$  para los cuáles  $B$  es congruente en  $\mathbb{R}$  con:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(c) Hallar todos los valores de  $a, b$  para los cuáles  $B$  es congruente en  $\mathbb{R}$  con la identidad

**(Examen final, enero 2011)**

---

V.– Dado  $k \in \mathbb{R}$ , se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$

Explicar de manera razonada si cada una de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

- i) Si  $k = 1$  son congruentes.
- ii) Para  $k = 2$  son equivalentes por filas.
- iii) Para  $k = 2$  son equivalentes por columnas.

**(Primer parcial, enero 2009)**

---

VI.– Sean las matrices real es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

¿Es posible encontrar una matriz  $X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tal que  $AX = B$ ? ¿Y una matriz  $Y \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  tal que  $YA = B$ ? Razona las respuestas.

---

VII.– Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , obtener mediante transformaciones elementales y cuando sea posible, la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a \end{pmatrix}$$

---

VIII.– Obtener la forma canónica de la siguiente matriz respecto de la congruencia sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  y sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$ , así como las matrices de paso:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

---

IX.– Sean  $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  dos matrices con el mismo determinante y la misma traza. ¿Es posible que  $A$  y  $B$  no sean equivalentes? ¿Y si además son simétricas? Razona las respuestas.

**(Primer parcial, enero 2010)**

---

**X.**– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Estudiar que parejas de matrices son equivalentes.
- (ii) Estudiar que parejas de matrices son semejantes.
- (iii) Estudiar que parejas de matrices son congruentes, dando para cada una de ellas la correspondiente matriz de paso por congruencia.

**(Examen de julio de 2015)**

---

**XI.**– Discutir y, en su caso, resolver, en función de los parámetros correspondientes, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}$$

---

**XII.**– Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i) Si  $\det(A) \neq 0$  y además  $A$  y  $B$  son equivalentes por filas entonces también son equivalentes por columnas.
- (ii) Si  $\det(A) = \det(B) = 0$  entonces  $A$  y  $B$  son equivalentes.
- (iii)  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .
- (iv) Si  $A$  y  $B$  son congruentes entonces  $\text{signo}(\text{traza}(A)) = \text{signo}(\text{traza}(B))$ .

**(Examen de julio de 2019)**

---